رياضيات الأولمبياد

مرحلة الإعداد

# نظرية الأعداد


معروف عبدالرحمن سمحان

ميساء بنت محمد القرشي

أروى بنت محمد الأمين الشنقيطي


$$\begin{cases} a^h \equiv 1 \bmod m \Rightarrow a^{[h,k]} \equiv 1 \bmod m \\ a^k \equiv 1 \bmod n \Rightarrow a^{[h,k]} \equiv 1 \bmod n \end{cases}$$







مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع

King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

رياضيات الأولمبياد

مرحلة الإعداد

# نظرية الأعداد

معروف عبدالرحمن سمحان

ميساء بنت محمد القرشي

أروى بنت محمد الأمين الشنقيطي




مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity



ح العبيكان، ١٤٣٦هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر.
سمحان، معروف عبدالرحمن.
رياضيات الأولمبياد - مرحلة الإعداد: نظرية الأعداد.
معروف عبدالرحمن سمحان؛ ميساء محمد القرشي؛
أروى محمد الأمين الشنقيطي - الرياض، ١٤٣٦هـ.
١٤٤ ص؛ ١٦,٥ × ٢٤ سم.
ردمك: ٠-١-٨٠١-٥٠٣-٦٠٣-٩٧٨
١- الرياضيات - تعليم.
٢- نظرية المجموعات. ٣- الأعداد.
أ. القرشي، ميساء محمد (مؤلف مشارك)
ب. الشنقيطي، أروى محمد الأمين (مؤلف مشارك)
ج. العنوان.
ديوي ٥١٠ رقم الإيداع ١٤٣٦/٧٣٠٤

الطبعة الأولى
١٤٣٦هـ / ٢٠١٥م



الناشر العبيكان Obeikan للنشر
المملكة العربية السعودية - الرياض - المحمدية
طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول
هاتف ٤٨٠٨٦٥٤ فاكس ٤٨٠٨٠٩٥
ص.ب ٦٧٦٢٢ الرياض ١١٥١٧

موقعنا على الإنترنت
www.obeikanpublishing.com
متجر العبيكان Obeikan على أبل
http://itunes.apple.com/sa/app/obeikan-store

امتياز التوزيع شركة مكتبة العبيكان Obeikan
المملكة العربية السعودية - الرياض - المحمدية
طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول
هاتف ٤٨٠٨٦٥٤ فاكس ٤٨٨٩٠٢٣
ص. ب ٦٢٨٠٧ الرمز ١١٥٩٥
www.obeikanretail.com


بسم الله الرحمن الرحيم

## مقدمة
## *Introduction*

تعد مسابقات الرياضيات التي يتم تنظيمها دورياً من سمات القــــرن الواحد والعشرين، حيث ازداد عدد المتقدمين لهذه المســـابقات بشـــكل ملحوظ وسجلت السنوات الأخيرة أعداداً تجاوزت عشـــرات الملايـــين، ولهذه الزيادة في أعداد المتسابقين أسباب عديدة مـــن أهمهـــا، أن هـــذه المسابقات هي وسيلة للتعرف على الطلاب الموهوبين والمبـــدعين الـــذين يواصلون دراستهم بتفوق ، ليس في الرياضيات فقط وإنمـــا في المجـــالات العلمية المختلفة ، كما أن للمسابقات تأثيراً إيجابياً على التعليم، إذ أنهـــا أدت إلى إنشاء أندية علمية في المدارس وإلى تطوير مواد إثرائية في العديد من دول العالم، انعكس أثرها على تطوير المناهج التعليمية وأدى إلى بروز باحثين متميزين في الرياضيات أسهموا في حل العديد من المسائل العلمية الصعبة. كما أن لمسابقات الرياضيات تأثيراً إيجابياً علـــى تغـــيير ثقافـــة المجتمعات ونظرتهم إلى مادة الرياضيات.

عقدت أول مسابقة أولمبياد دولية في الرياضيات (IMO ) في رومانيا عام ١٩٥٩م حيث بلغ عدد الدول المشاركة في هذه المسابقة سبع دول ،

بعد ذلك توالى عقد المسابقة سنوياً وبانتظام إلى وقتنا الحاضر ( ما عـــدا العام ١٩٨٠م بسبب ظروف طرأت على الدولة المضيفة). ولقـــد ازداد عدد الدول المشاركة باطراد إلى أن وصل عدد الدول المشاركة في العـــام ٢٠٠٩م إلى ١٠٤ دولة.

كانت أول مشاركة للمملكة العربية السعودية في الأولمبياد الدولي في العام ٢٠٠٤م حيث كان أداء الفريق السعودي متواضعاً نتيجة لقلـــة الخبرة والإعداد الجيد في التدريب. استمر هذا الأداء المتواضع إلى العـــام ٢٠٠٨م.

بعد ذلك أوكلت وزارة التربية والتعليم مهمة الإعداد للأولمبياد لمؤسســـة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع "موهبة" واتخذت موهبة عـــدة قرارات نوعية تحسب لها، أهمها الاستفادة من خبرات الدول المتفوقـــة في مسابقة الأولمبياد في إعداد البرامج التدريبية للفريق الســـعودي . ومـــن القرارات الأخرى المهمة، توفير مادة تدريبية باللغة العربية تغطي مراحـــل التدريب المختلفة فأوعزت إلى فريق من الأكاديميين المهتمين بالمســـابقات بوضع سلسلتين من الكتب، السلسلة الأولى تخدم الناشئين الـــراغبين في التدريب المبكر ، وأما السلسلة الثانية فهي موجهة للمراحـــل المتقدمـــة. تحتوي السلسلة الأولى على ثمانية كتب تعالج أربعة مواضيع هي نظريـــة

الأعداد، الجبر ، والهندسة، والتركيبات ، وكل من هذ الكتب مكون من جزأين يغطيان المرحلة الأولى والثانية من تدريب الناشئين.

أما السلسلة الثانية فموجهة إلى المرحلتين الثالثة والرابعة من التدريب ومكونة من عشرة كتب تغطي المواضيع الأربعة السابقة وهي المواضيع المطلوب من المتدرب معرفتها للتحضير لمسابقة الأولمبياد.

هذا الكتاب هو الجزء الأول من نظرية الأعداد للمرحلة الأولى ويقع في فصلين هما قابلية القسمة والأعداد الأولية والمبرهنة الأساسية في الحساب .

ولقد حرصنا أن تكون المسائل متنوعة وبمستويات صعوبة تتفق مع الاختلاف في القدرات بين الطلاب حيث العديد منها مأخوذ من مسائل مسابقات الناشئين لعدة دول، منها الولايات المتحدة الأمريكية، وكندا، والمملكة المتحدة ، واستراليا. إن الهدف الأهم من هذه الكتب هو مساعدة الطالب على فهم المادة المطروحة حتى مع غياب المدرب ثم يقوم بمحاولة حل المسائل دون النظر إلى حلولها ومن ثم يقوم بمقارنة حلوله مع الحلول المقدمة في الكتاب لهذه المسائل . كما يتضمن الكتاب مسائل غير محلولة مع وجود الإجابات النهائية لها ، لزيادة التحدي لدى الطلاب.

الوسيلة الوحيدة للتعلم والتدريب على حل المسائل هي أن يقضي الطالب وقتاً كافياً في التفكير في المسألة ثم يضع لنفسه استراتيجية لحل

المسألة، بعد ذلك يجرب هذه الاستراتيجية لمعرفة مدى نجاحها، وقد يضطر إلى تعديلها بصورة تدريجية إلى أن يصل إلى الحل الصحيح. إن تكرار المحاولات في مسائل مختلفة ومتنوعة تكسب الطالب الخبرة اللازمة للوصول إلى المستوى التنافسي في المسابقات.

وفي النهاية نتقدم بالشكر والتقدير إلى الأستاذ عبدالرحمن بلفقيه على مراجعة النسخة الأولية من هذا الكتاب وإبداء ملاحظاته القيمة. كما نود أن نتقدم بالشكر إلى مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع "موهبة" على اهتمامها بوضع برامج مدروسة دراسة جيدة لتدريب الطلاب على المسابقات ، سواء المسابقات المحلية أو مسابقات الأولمبياد مما شجعنا على القيام بتأليف هذا الكتاب، الذي نرجو الله أن يجعله محققاً للهدف الذي أعد من أجله، كما نرجو أن يوفق طلابنا وطالباتنا في المنافسة على المستوى الوطني والعالمي .

ولا يفوتنا أن نشكر الأستاذ طلال أبو عايش على صبره علينا أثناء صف الكتاب حتى خرج بصورته النهائية.

**المؤلفون**

**الرياض**

**١٤٣٤هـ (٢٠١٣م).**

## المحتويات

# الاختصارات

## Abbreviations

| | |
|---|---|
| AHSME | American High School Mathematics Examination |
| AIME | American Invitational Mathematics Examination |
| AMC8 | American Mathematics Contest 8 |
| AMC10 | American Mathematics Contest 10 |
| AMC12 | American Mathematics Contest 12 |
| Aust.MC | Australian Mathematics Competition |
| British JMC | British Junior Mathematics Challenge |
| British IMC | British Intermediate Mathematics Challenge. |
| British SMC | British Senior Mathematics Challenge |
| HMMT | Harvard – MIT Math Tournament |
| MAΘ | Mu Alpha Theta High School Problems |

# الفصل الأول

## قابلية القسمة
## *Divisibility*

تتمتع مجموعة الأعداد الصحيحة بالعديد من الخصائص المهمة التي لها تطبيقات عديدة. ويسمى فرع الرياضيات الذي يهتم بدراسة هذه الخصائص ، نظرية الأعداد وهو من الموضوعات التي تحتاج إلى تهيئة واسعة ومع ذلك فإن متطلباتها المسبقة محدودة جداً. كما أن نظرية الأعداد من الموضوعات التي يجب الإلمام بأساسياتها في المسابقات الرياضية المختلفة. نقدم في هذا الكتاب المباديء الأساسية لنظرية الأعداد .

### قابلية القسمة [*Divisibility*]

يقبل العدد الصحيح $a$ القسمة على العدد الصحيح غير الصفري $b$ ونرمز لذلك بالرمز $b \mid a$ إذا كان $a$ مضاعفاً صحيحاً للعدد $b$ ، أي إذا وجد عدد صحيح $c$ يحقق $a = bc$ . على سبيل المثال ، $3 \mid 18$ لأن $18 = 3 \times 6$ ، $-5 \mid 20$ . لأن $20 = (-5) \times 4$ . إذا لم يقبل العدد $a$ القسمة على العدد $b$ فإننا نرمز لذلك بالرمز $b \nmid a$. على سبيل المثال ، $3 \nmid 14$ و $-5 \nmid 22$ .

**ملحوظة**

إذا كان $a \mid b$ فإننا نقول أيضــاً إن $b$ يقســم $a$ ($b$ *divides* $a$) أو إن $b$ قاسم أو عامل (*divisor or factor*) للعدد $a$ .

نسرد الآن بعض الخصائص الأساسية لعلاقة القسمة على الأعداد الصحيحة:

(١) إذا كان $a \mid b$ و $b \mid c$ فإن $a \mid c$ .

فمثلاً $6 \mid 3$ و $18 \mid 6$ ، ولذا فإن $3 \mid 18$ .

(٢) إذا كان $a \mid b$ و $c \mid d$ فإن $ac \mid bd$ .

على سبيل المثــال ، $10 \mid 5$ و $6 \mid 3$ . ولــذا فــإن $3 \times 5 = 15$ يقســم $6 \times 10 = 60$ .

(٣) $a \mid b$ إذا وفقط إذا كان $ma \mid mb$ حيــث $m \neq 0$ . فمــثلاً ، $6 \mid 3$ إذا وفقط إذا كان $5 \times 6 \mid 5 \times 3$ .

(٤) إذا كان $a \mid b$ و $b \neq 0$ فإن $|a| \leq |b|$ . على سبيل المثال ، $20 \mid 5-$ . ولذا فإن $5 \leq 20$.

(٥) $a \mid b$ و $b \mid a$ إذا وفقط إذا كان $a = \pm b$ . فمــثلاً، $2 \mid 2-$ و $2- \mid 2$ ومن ثم فإن $2 = -(-2)$ .

(٦) إذا كان $a \mid b$ و $a \mid c$ فإن $a \mid (bx + cy)$ لجميع الأعداد الصحيحة $x, y$ . على وجه الخصوص $a \mid (b+c)$ و $a \mid (b-c)$ . فمثلاً، $6 \mid 3$ و $15 \mid 3$ ولذا فإن $3 \mid (2 \times 6 + 4 \times 15)$ .

العدد الأولي (*prime number*) هو العدد الصحيح $p > 1$ الذي له قاسمان فقط هما 1و $p$ .

الأعداد الأولية التي لا تزيد عن 15 هي 13 ، 11 ، 7 ، 5 ، 3 ، 2 .

**ملحوظات**

(١) لاحظ أن العدد 1 ليس أولياً وسنبين السبب وراء ذلك في الفصل الثاني عند دراسة الأعداد الأولية بشيء من التفصيل.

(٢ ) العدد الأولي الزوجي الوحيد هو العدد 2 وما عدا ذلك فجميع الأعداد الأولية الأخرى هي أعداد فردية.

نسرد الآن بعض اختبارات قابلية القسمة على بعض الأعداد الأولية الصغيرة:

(١) يقبل العدد $n$ القسمة على العدد 2 إذا وفقط إذا كان العدد $n$ زوجياً.

(٢) يقبل العدد $n$ القسمة على العدد 3 إذا وفقط إذا قبل مجموع مراتب العدد $n$ القسمة على العدد 3 . فمثلاً، مجموع مراتب العدد 576 هو $5+7+6=18$ وهذا المجموع يقبل القسمة على العدد 3 ، ولذا فالعدد 576 يقبل القسمة على العدد 3 .

(٣) يقبل العدد $n$ القسمة على العدد 5 إذا وفقط إذا كانت مرتبة آحاده هي 0 أو 5 . فمثلاً، كل من العددين 375 و 370 يقبل القسمة على العدد 5 .

(٤) يقبل العدد $n$ القسمة على 9 إذا وفقط إذا قبل مجموع مراتب العدد $n$ القسمة على 9 .

(٥) يقبل العدد $n$ القسمة على 10 إذا وفقط إذا كانت مرتبة آحاده تساوي صفراً.

(٦) يقبل العدد $n$ القسمة على العدد 11 إذا وفقط إذا قبل المجموع التناوبي لمراتب العدد (تناوب إشارات المراتب موجب، سالب، موجب وهكذا ) القسمة على العدد 11 .

فمثلا، المجموع التناوبي لمراتب العدد $n = 894325734$ هو

$$4-3+7-5+2-3+4-9+8=5$$

وبما أن العدد 5 لا يقبل القسمة على 11 فإن العدد $n$ لا يقبل القسمة على 11 .

(٧) يقبل العدد $n$ القسمة على العدد $2^k$ إذا قبل العدد المكون من أول $k$ مرتبة من مراتب العدد $n$ القسمة على $2^k$ . فمثلاً، يقبل العدد $n$ القسمة على العدد $2^2 = 4$ إذا قبل العدد المكون من مرتبتي آحاد وعشرات العدد $n$ القسمة على العدد 4 .

(٨) يقبل العدد $n$ القسمة على العدد $5^k$ إذا قبل العدد المكون من أول $k$ مرتبة من مراتب العدد $n$ القسمة على $5^k$ .

**مثال (١)** أي من الأعداد 11 ، 10 ، 9 ، 8 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 يكون قاسماً للعدد $n = 894345354$؟

**الحل**

العدد زوجي، ومن ثم فهو يقبل القسمة على 2 .

مجموع مراتبه $45 = 4+5+3+5+4+3+4+9+8$ .

وبما أن 45 يقبل القسمة على 3 وعلى 9 فالعدد يقبل القسمة على 3 وعلى 9 .

العدد لا يقبل القسمة على 4 (ومن ثم لا يقبل القسمة على 8) لأن 54 لا يقبل القسمة على 4 .

العدد لا يقبل القسمة على 5 لأن آحاده لا يساوي 0 أو 5 (ومن ثم فهو لا يقبل القسمة على 10) .

العدد يقبل القسمة على 6 لأنه يقبل القسمة على 2 وعلى 3 .

المجموع التناوبي لمراتب العدد هو

$$4-5+3-5+4-3+4-9+8=1$$

وبما أن 1 لا يقبل القسمة على 11 فالعدد لا يقبل القسمة على 11 . ◆

**مثال (٢)** جد أصغر عدد صحيح موجب مكون من ثلاث مراتب ويقبل القسمة على كل من 5 ، 6 ، 8 ، 9 .

**الحل**

لكي يقبل العدد القسمة على 5 فيجب أن يكون أحد عوامله يساوي 5 . ولكي يقبل القسمة على 8 فيجب أن يكون أحد عوامله هو 8 . ولكي يقبل العدد القسمة على 9 فيجب أن يكون أحد عوامله هو 9 . وبما أن العدد يقبل القسمة على 8 فهو يقبل القسمة على 2 . كذلك هذا العدد يقبل القسمة على 3 لأنه يقبل القسمة على 9 . وبهذا فهو يقبل القسمة على 6. إذن، العدد هو $5\times8\times9=360$ . ◆

**مثال (٣)** إذا قسمنا عدداً صحيحاً موجباً أصغر من 100 على العدد 3 يكون الباقي 2 وعند قسمته على العدد 4 يكون الباقي 3 وعند قسمته على العدد 5 يكون الباقي 4 . ما هو باقي قسمة العدد على 7 ؟

**الحل**

لنفرض أن العدد هو $x$ . عندئذ، يقبل العدد $x+1$ القسمة على $60=5\times4\times3$ . وبهذا نرى أن $x=59$ (لاحظ أن $x<100$ ) . ويكون باقي قسمة العدد 59 على 7 هو 3. ◆

**مثال (٤)** ما باقي قسمة العدد 7300004003 على العدد 5 ؟

**الحل**

لاحظ أن $7300004003=7300004000+3$ . وبما أن العدد 7300004000 يقبل القسمة على العدد 5 فإن باقي قسمة العدد 7300004003 على العدد 5 يساوي 3 . ◆

**مثال (٥)** جد جميع الأعداد $x739y$ المكونة من خمس مراتب والتي تقبل القسمة على 36.

**الحل**

بما أن العدد $x739y$ يقبل القسمة على 36 فهو يقبل القسمة على كل من 4 و 9 . من ذلك نرى أن $9y$ يقبل القسمة على 4 . إذن، $y=2$ أو $y=6$ .

أيضاً، المجموع $x+7+3+9+y=x+y+19$ يقبل القسمة على 9 . وبما أن $x$ و $y$ مرتبتان فإن $x+y=8$.

الآن، إذا كان $y=2$ فنرى أن $x=6$ . وإذا كان $y=6$ فنرى أن $x=2$. من ذلك نرى أن لدينا عددين يحققان المطلوب هما 67392 و 27396 . ◆

**مثال** (٦) ما أصغر عدد صحيح يقبل القسمة على كل من العددين 4 و 11 وتتكون جميع مراتبه من المرتبتين 1 أو 2 ؟

**الحل**

لاحظ أولاً أن العددين 1 و 2 لا يحققان المطلوب. ولكي يقبل العدد القسمة على 4 فيجب أن يكون زوجياً. العددان الزوجيان المكونان من مرتبتين هما 12 و 22 وكلاهما لا يحقق المطلوب. لأن 12 يقبل القسمة على 4 ولكنه لا يقبل القسمة على 11 و 22 يقبل القسمة على 11 ولكنه لا يقبل القسمة على 4 .

الأعداد المكونة من 3 مراتب هي 112 ، 122 ، 212 ، 222 . العددان 112 و 212 يقبلان القسمة على 4 ولكنهما لا يقبلان القسمة على 11 .

أما العددان 122 و 222 فلا يقبلان القسمة على العدد 4 . إذن، نحتاج إلى عدد مكون من 4 مراتب وهذه الأعداد هي

1112 ، 1212 ، 2112 ، 2212

والعدد الوحيد من بينها الذي يقبل القسمة على 4 و 11 هو 2112. ◆

إن احدى أهم الخواص الأساسية للأعداد الصحيحة هي خوارزمية القسمة وهي:

**خوارزمية القسمة [*Division Algorithm*]**

إذا كان $a$ عدداً صحيحاً غير صفري وكان $b$ عدداً صحيحاً فهناك عددان صحيحان وحيدان $q$ و $r$ يحققان

$$b = qa + r \text{ ، } 0 \le r < |a| .$$

يسمى العدد $q$ خارج قسمة *(quotient)* العدد $b$ على العدد $a$ ويسمى العدد $r$ باقي *(remainder)* القسمة.

**مثال (٧)** إذا كان $n$ مربعاً كاملاً (أي، $n = a^2$ ) فأثبت أن باقي قسمة $n$ على العدد 4 هو 0 أو 1 .

**الحل**

استناداً إلى خوارزمية القسمة نجد أن $a = 2q + r$ حيث $r = 0$ أو $r = 1$ .

الآن، $n = a^2 = 4q^2 + 4qr + r^2 = 4(q^2 + qr) + r^2$ .

وبما أن $r = 0$ أو $r = 1$ فإن $r^2 = 0$ أو $r^2 = 1$ . وبهذا يكون $n = a^2 = 4k$ أو $n = a^2 = 4k + 1$ . ◆

**القاسم المشترك الأكبر [Greatest Common Divisor]**

إذا كان $a$ و $b$ عددين صحيحين ليس كلاهما صفراً، فالقاسم المشترك الأكبر بينهما هو أكبر عدد صحيح موجب $d$ يقسم كليهما. أي أن $d$ يحقق:

(١) $d \mid a$ و $d \mid b$

(٢) إذا كان $c \mid a$ و $c \mid b$ فإن $c \leq d$.

سنرمز للقاسم المشترك الأكبر للعددين $a$ و $b$ بالرمز $\gcd(a,b)$ . الجدول التالي يبين لنا القاسم المشترك الأكبر لبعض الأزواج من الأعداد الصحيحة

| $a$ | $b$ | $d = \gcd(a,b)$ |
|---|---|---|
| 4 | 5 | 1 |
| 9 | 15 | 3 |
| 8 | 32 | 8 |
| 15 | 35 | 5 |
| 20 | 30 | 10 |

إن مسألة إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين من المسائل المهمة ، احدى طرق حسابه تكون بإيجاد مجموعة قواسم كل من العددين ثم إيجاد الأعداد المشتركة بين المجموعتين ويكون القاسم المشترك الأكبر هو أكبر هذه الأعداد المشتركة. من الواضح أن هذه الطريقة ليست عملية خاصة عندما يكون العددان كبيرين . سنقدم طريقتين أكثر فعالية ، الأولى منهما تدعى خوارزمية إقليدس التي تعتمد على تكرار خطوات خوارزمية القسمة . أما الطريقة الثانية فتعتمد على المبرهنة الأساسية في الحساب والتي نؤجل نقاشها إلى الفصل الثاني من هذا الكتاب.

خوارزمية إقليدس تعتمد على الحقائق التالية:

(١) إذا كان $b = qa + r$ فإن $\gcd(a,b) = \gcd(a,r)$ .

(٢) $\gcd(a,b) = \gcd(-a,b) = \gcd(a,-b) = \gcd(-a,-b)$ .

(٣) $\gcd(a,0) = a$ عندما يكون $a > 0$ .

**خوارزمية إقليدس [*Euclidean Algorithm*]**

لنفرض أن $a = r_0$ و $b = r_1$ عددان صحيحان حيث $a \geq b > 0$ . عند استخدام خوارزمية القسمة بالتتابع نحصل على :

$$\begin{aligned}
r_0 &= q_1 r_1 + r_2 \quad ، \quad 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_2 r_2 + r_3 \quad ، \quad 0 \leq r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-3} &= q_{n-2} r_{n-2} + r_{n-1} \quad ، \quad 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2} \\
r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n \quad ، \quad 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_n r_n + 0
\end{aligned}$$

وعادة ما تسمى هذه المتطابقة "متطابقة بيزو".

لاحظ أنه لا بد من الحصول على باقٍ يساوي 0 بعد عدد منته من الخطوات لأن $a = r_0 > r_1 > r_2 > \ldots \geq 0$ . ومن الحقائق السابقة نرى أن

$$\gcd(a,b) = \gcd(r_0, r_1) = \gcd(r_1, r_2) = \ldots = \gcd(r_{n-1}, r_n) = \gcd(r_n, 0) = r_n$$

**مثال (٨)** استخدم خوارزمية إقليدس لإيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 45 و 75 .

**الحل**

بتنفيذ خطوات خوارزمية إقليدس نحصل على

$$75 = 1\times 45 + 30$$
$$45 = 1\times 30 + 15$$
$$30 = 2\times 15 + 0$$

وبهذا نرى استناداً إلى خوارزمية إقليدس أن $\gcd(45, 75) = 15$ . ◆

**ملحوظات**

(١) إذا كان $\gcd(a, b) = 1$ فنقول إن العددين $a$ و $b$ أوليان نسبياً *(relatively prime)* . على سبيل المثال ، العددان 9 ، 14 أوليان نسبياً لأن $\gcd(9, 14) = 1$ .

(٢) لاحظ إمكانية استخدام خوارزمية إقليدس بخطوات إرجاعية لكتابة القاسم المشترك الأكبر للعددين $a$ و $b$ كتركيب خطي لهما. أي إمكانية إيجاد عددين $x$ و $y$ بحيث يكون

$$\gcd(a, b) = ax + by$$

على سبيل المثال، وجدنا في المثال (٨) القاسم المشترك الأكبر للعددين 45 و 75. وباستخدام خطوات المثال إرجاعياً نحصل على

$$\begin{aligned} 15 &= 45 - 1\times 30 \\ &= 45 - 1(75 - 1\times 45) \\ &= 45\times 2 + 75\times(-1) \end{aligned}$$

وبهذا يكون $x = 2$ و $y = -1$ .

(٣) يمكن استخدام خوارزمية إقليدس لحساب $\gcd(a,b)$ بـــالطرح المتكـــرر لأصغر العددين من العدد الأكبر ، فمثلاً يتم حساب $\gcd(45, 75)$ علـــى النحو التالي:

$$\begin{aligned}\gcd(45,75) &= \gcd(45,30)\\ &= \gcd(30,15)\\ &= \gcd(15,15)\\ &= 15\end{aligned}$$

وهذا يتفق مع ما وجدنا في المثال (٨) .

من الممكن إيجاد القاسم المشترك الأكبر لأكثر من عـــددين باســـتخدام خوارزمية إقليدس والحقيقة التالية :

$$\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \gcd(a_1,a_2,\ldots,a_{n-2},\gcd(a_{n-1},a_n))$$

**مثال (٩)** احسب $\gcd(35, 45, 75)$ .

**الحل**

وجدنا في المثال (٨) أن $\gcd(45,75) = 15$ . ولهذا نرى أن

$$\gcd(35,45,75) = \gcd(35,15)$$

باستخدام خوارزمية إقليدس نجد أن

$$\begin{aligned}35 &= 2\times 15 + 5\\ 15 &= 3\times 5 + 0\end{aligned}$$

ولذا فإن $\gcd(35, 45, 75) = \gcd(35,15) = 5$ . ◆

**المضاعف المشترك الأصغر [Least Common Multiple]**

يرمز للمضاعف المشترك الأصغر للعددين $a$ و $b$ بالرمز $lcm(a,b)$ ويُعرّف على أنه أصغر عدد صحيح موجب $m$ يقبل القسمة على كل من العددين $a$ و $b$ . أي أن :

(١) $a \mid m$ و $a \mid m$.

(٢) إذا كان $a \mid n$ و $b \mid n$ حيث $n > 0$ فإن $m \le n$.

لحساب المضاعف المشترك الأصغر لعددين نستخدم العلاقة المهمة التالية بين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين:

$$\gcd(a,b) . lcm(a,b) = ab \qquad (1)$$

**مثال(١٠)** وجدنا في المثال (٨) أن $\gcd(45,75) = 15$ . وبهذا يكون

$$lcm(45,75) = \frac{45 \times 75}{15} = 225 \ .$$ ◆

يمكن إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لأكثر من عددين باستخدام الحقيقة التالية :

$$lcm(a_1, a_2, \ldots, a_n) = lcm(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, lcm(a_{n-1}, a_n))$$

**مثال (١١)** لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 35 ، 45 ، 75 لاحظ أولاً أن $lcm(45,75) = 225$ (كما هو مبين في المثال (١٠) ) . الآن

$$lcm(35,45,75) = lcm(35,225)$$

واستناداً إلى خوارزمية إقليدس نجد أن

$$225 = 6\times 35 + 15$$
$$35 \;= 2\times 15 + 5$$
$$15 \;= 3\times 5 + 0$$

ومن ذلك يكون $lcm(35, 225) = \dfrac{35\times 225}{5} = 1575$ .

إذن، $lcm(35, 45, 75) = 1575$ . ◆

**تحذير**

العلاقة (١) ليست صحيحة لأكثر من عددين ، فمثلاً $\gcd(6, 10, 15) = 1$ و $lcm(6, 10, 15) = 30$ . ولكن

$$lcm(6, 10, 15)\gcd(6, 10, 15) = 30 \neq 6\times 10\times 15 = 900$$

نقدم الآن بعض الأمثلة ذات الطابع النظري التي تساعدنا على فهم أفضل لمفهومي القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر، كما أنها تساعدنا على حل بعض المسائل الحسابية .

**مثال (١٢)** افرض أن $a$ و $b$ عددان صحيحان ليس كلاهما صفراً. إذا وجد عددان صحيحان $x$ و $y$ يحققان $1 = ax + by$ فأثبت أن $\gcd(a,b) = 1$ .

**الحل**

نفرض أن $1 = ax + by$ ونفرض لغرض الحصول على تناقض أن $\gcd(a,b) = d > 1$ . عندئذ، $d \mid a$ و $d \mid b$. ومن ذلك نرى أن $d \mid (ax + by)$. أي أن $d \mid 1$ وهذا مستحيل. إذن، $d = 1$ . ◆

**مثال (١٣)** إذا كان $\gcd(a,b) = 1$ وكان $a \mid c$ و $b \mid c$ فأثبت أن $ab \mid c$ .

**الحل**

بما أن $\gcd(a,b)=1$ فيوجد عددان صحيحان $x$ و $y$ حيث $1=ax+by$. وبما أن $a \mid c$ و $b \mid c$ فيوجد عددان صحيحان $r$ و $s$ حيث $c=ar$ و $c=bs$ . الآن

$$\begin{aligned} c = c\times 1 &= c(ax+by) \\ &= cax+cby \\ &= bsax+arby \\ &= ab(sx+ry) \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن $ab \mid c$ . ◆

**ملحوظة**

لا يمكن الاستغناء عن الشرط $\gcd(a,b)=1$ في المثال (١٣) ، فمثلاً، $48 \mid 8$ و $48 \mid 12$ ولكن $8\times 12=96$ لا يقسم العدد 48 .

**مثال (١٤)** إذا كان $\gcd(a,b)=1$ وكان $a \mid bc$ فأثبت أن $a \mid c$ .

**الحل**

بما أن $\gcd(a,b)=1$ فيوجد عددان صحيحان $x$ و $y$ حيث $1=ax+by$ . بضرب طرفي المعادلة بالعدد $c$ نرى أن $c=acx+bcy$ . ولكن $a \mid ac$ و $a \mid bc$ . وبهذا نجد أن $a \mid (acx+bcy)$ . ومن ثم فإن $a \mid c$ . ◆

**ملحوظة**

الشرط $\gcd(a,b)=1$ ضروري في المثال (١٤) . فمثلاً ، $12 \mid 9\times 8$ ولكن $12 \nmid 9$ و $12 \nmid 8$.

**مثال (١٥)** إذا كان $\gcd(a,b)=d$ فأثبت أن $\gcd\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$ .

**الحل**

بما أن $\gcd(a,b)=d$ فيوجد عددان صحيحان $x$ و $y$ حيث $d=ax+by$. وبقسمة طرفي المعادلة على العدد $d$ نرى أن $1=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y$. وباستخدام المثال (١٢) نجد أن $\gcd\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$. ◆

**مثال (١٦)**

إذا كان $a \mid c$ و $b \mid c$ فأثبت أن $lcm(a,b) \mid c$ .

**الحل**

لنفرض أن $m=lcm(a,b)$ . بما أن $a \mid c$ و $b \mid c$ فيوجد عددان صحيحان $x$ و $y$ حيث $c=ax$ و $c=by$ . الآن ، $m=\frac{ab}{d}$ حيث $d=\gcd(a,b)$ . ولذا يوجد عددان صحيحان $r$ و $s$ يحققان $d=ar+bs$ . من ذلك نجد أن

$$\begin{aligned}\frac{c}{m}&=\frac{cd}{ab}\\&=\frac{car+cbs}{ab}\\&=\left(\frac{c}{b}\right)r+\left(\frac{c}{a}\right)s\end{aligned}$$

وهذا عدد صحيح. إذن، $m \mid c$ . ◆

**مثال (١٧)** [$RUMO$ 1995] إذا كان $m$ و $n$ عددين صحيحين موجبين يحققان

$$lcm(m,n)+\gcd(m,n)=m+n$$

فأثبت أن أحدهما يقبل القسمة على الآخر.

**الحل**

لنفرض أن $d=\gcd(m,n)$ . عندئذ، يمكن إيجاد عددين صحيحين $a$ و $b$ بحيث يكون $m=ad$ ، $n=bd$ , $\gcd(a,b)=1$ .

الآن،

$$lcm(m,n)=\frac{mn}{\gcd(m,n)}=\frac{(ad)(bd)}{d}=abd$$

وبالتعويض في المعادلة $lcm(m,n)+\gcd(m,n)=m+n$ نرى أن

$$abd+d=ad+bd$$

وهذه تكافيء المعادلة

$$(a-1)(b-1)=0$$

إذن، $a=1$ أو $b=1$ .

إذا كان $a=1$ فإن $m=d$ و $n=bd=bm$ . وبهذا نجد أن $m\mid n$ .

أما إذا كان $b=1$ فإن $n=d$ و $m=ad=an$ ويكـــون $n\mid m$ في هذه الحالة. ◆

## تمثيل الأعداد [*Representation of Integers*]

من الممكن كتابة العدد الصحيح 876932 على الصورة

$$800000+70000+6000+900+30+2$$

والسبب الذي يسمح لنا بكتابة العدد بهذه الطريقة هو استخدامنا للنظام العشري لتمثيل الأعـــداد . أي اســـتخدامنا لعشـــرة أرقـــام (تســـمى مراتـــب، هـــي

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 . كل من هذه المراتب عبارة عن قوة للعدد 10 (يعتمد على موقع المرتبة في العدد ). ولهذا يمكن كتابة العدد 876982 على الصورة

$$8\times10^5+7\times10^4+6\times10^3+9\times10^2+8\times10+2\times10^0$$

ولكن هل النظام العشري هو النظام الوحيد لتمثيل الأعداد؟ الإجابة هي لا، حيث نعتقد أن استخدامنا للنظام العشري يرجع إلى أن عدد أصابع اليدين يساوي عشرة مما يسهل علينا الحساب، والجدير بالذكر أن النظام العددي لدى البابليين كان النظام الستيني (للأساس 60). كما أن النظام العددي الذي استخدمه المايانيون (شعوب عاشت في أمريكا الوسطى والمكسيك) هو النظام العشريني ، والحاسبات الآلية تستخدم النظام الثنائي . في الحقيقة، إن أي عدد صحيح أكبر من 1 يصلح لأن يكون أساساً لنظام عددي. فمثلاً يمكن كتابة العدد 76412 في النظام الثماني (للأساس 8 ) على النحو التالي:

$$7\times8^4+6\times8^3+4\times8^2+1\times8+2\times8^0$$

للتمييز بين الأساسات المختلفة للأعداد نقوم بكتابة أساس العدد كدليل للعدد، فمثلاً نكتب $76412_8$ إذا كان الأساس هو 8 وهكذا. أما إذا كان الأساس هو 10 فنكتب 76412 عوضاً عن $76412_{10}$ وذلك للسهولة.

**مثال (١٨)** حول العدد $76412_8$ إلى النظام العشري.

**الحل**

$$\begin{aligned}76412_8 &= 7\times8^4+6\times8^3+4\times8^2+1\times8+2\times8^0\\ &= 7\times4096+6\times512+4\times64+1\times8+2\\ &= 28672+3072+256+8+2\\ &= 32010\end{aligned}$$

وبهذا يكون $32010 = 76412_8$. ◆

**مثال (١٩)** حول العدد $76412_8$ إلى النظام السداسي.

**الحل**

نقوم أولاً بتحويل العدد $76412_8$ إلى النظام العشري لنجد أن $76412_8 = 32010$ (كما هو مبين في المثال (١٥ )). الآن ، بملاحظة أن $6^2 = 36$ ، $6^3 = 216$ ، $6^4 = 1296$ ، $6^5 = 7776$ ، $6^6 = 46656$

نرى أن

$$\begin{aligned}76412_8 &= 32010 = 31104 + 906 \\ &= 4\times 6^5 + 4\times 6^3 + 42 \\ &= 4\times 6^5 + 4\times 6^3 + 1\times 6^2 + 6 \\ &= 4\times 6^5 + 4\times 6^3 + 1\times 6^2 + 1\times 6^1 + 0\times 6^0 \\ &= 404110_6\end{aligned}$$

وبهذا يكون $76412_8 = 404110_6$ . ◆

**ملحوظة**

عند استخدامنا لنظام أساسه أكبر من 10 نحتاج إلى مراتب أكثر من المراتب العشرة الشائعة الاستخدام وهذا ليس بالأمر العسير حيث نقوم باستخدام رموز جديدة للمراتب الأكثر من عشرة، على سبيل المثال، مراتب النظام الستة عشري (أساس 16 ) الشائع الاستخدام هي :

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$$

وهذا يعني أن $A_{16} = 10_{10}$ ، $B_{16} = 11_{10}$ ، $C_{16} = 12_{10}$ ، $D_{16} = 13_{10}$ ، $E_{16} = 14_{10}$ ، $F_{16} = 15_{10}$.

**مثال (٢٠)** حول العدد $DEF92_{16}$ إلى النظام العشري.

**الحل**

$$\begin{aligned} DEF92_{16} &= 13\times16^4+14\times16^3+15\times16^2+9\times16+2\times16^0 \\ &= 851968+57344+3840+144+2 \\ &= 913298 \end{aligned}$$

إذن، $DEF92_{16}=913298$ . ◆

**مرتبة آحاد العدد [*The Units Digit*]**

العديد من مسائل المسابقات تتضمن حساب مرتبة آحاد حاصل جمع أو حاصل ضرب أعداد . لإنجاز ذلك علينا ملاحظة ما يلي:

(١) مرتبة آحاد حاصل جمع عددين هي مرتبة آحاد حاصل جمع مرتبتي آحادهما. فمثلاً، مرتبة آحاد $51324736+345789$ هي $5$ لأن $9+6=15$ ومرتبة آحاد هذا العدد هي $5$ .

(٢) مرتبة آحاد حاصل ضرب عددين هي مرتبة آحاد حاصل ضرب مرتبتي آحادهما. فمثلاً، مرتبة آحاد $51324786\times345789$ هي $4$ لأن $9\times6=54$ ومرتبة آحاد هذا العدد هي $4$ .

(٣) مرتبة آحاد مربع عدد هي مرتبة آحاد مربع مرتبة آحاده، فمثلاً، مرتبة آحاد العدد $5723436^2$ هي $6$ لأن $6^2=36$ ومرتبة آحاد هذا العدد هي $6$ .

**مثال (٢١)** جد مرتبة آحاد العدد $19^{93}+7^{42}$.

**الحل**

لاحظ أن مرتبة آحاد العدد $19^{93}$ هي نفس مرتبة آحاد العدد $9^{93}$. الآن، $9^2=81$ ومرتبة آحاده تساوي1 . وبما أن $9^{93}=9^{92}\times 9=(9^2)^{46}\times 9$ فنرى أن مرتبة آحاد $9^{93}$ هي $1\times 9=9$ .

أيضاً ، مرتبة أحاد $7^2=49$ هي 9 . مرتبة أحاد $7^4=7^2\times 7^2$ هي مرتبة آحاد $9\times 9=81$ وهي 1. وبما أن $7^{42}=(7^4)^{10}\times 7^2$ فإن مرتبة آحاد $7^{42}$ هي مرتبة آحاد $1\times 9=9$ وهي 9 .

إذن، مرتبة آحاد $19^{93}+7^{42}$ هي مرتبة آحاد $9+9=18$ وتساوي 8 . ◆

**مثال (٢٢)**

ما المراتب من بين المراتب العشرة $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ التي يمكن أن تكون مرتبة آحاد مربع كامل؟

**الحل**

بتربع المراتب نجد أن

$0^2=0$ ، $1^2=1$ ، $2^2=4$ ، $3^2=9$ ، $4^2=16$ ، $5^2=25$، $6^2=36$، $7^2=49$ ، $8^2=64$، $9^2=81$. ولذا فالمراتب 0 ، 1 ، 4 ، 5 ، 6 ، 9 يمكن أن تكون مرتبة آحاد مربع كامل. وأما المراتب 2 ، 3 ، 7 ، 8 فلا يمكن أن تكون مرتبةآحاد مربع كامل . ◆

**مثال (٢٣)** ما مرتبة آحاد العدد $15785^2+13089^2$ ؟

**الحل**

مرتبة أحاد $13089^2$ هي مرتبة آحاد $9^2$ وهي 1 ومرتبة آحـــاد $15785^2$ هي مرتبة آحاد $5^2$ وهي 5. إذن، مرتبة آحاد المجموع $15785^2+13089^2$ هـــي مرتبة آحاد $1+5=6$ وهي 6. ◆

**مثال (٢٤)** ما مرتبة آحاد العدد $(1+2+3+4+ \dots +50)^3$.

**الحل**

لاحظ أن $1+2+3+\dots+50=\frac{50\times51}{2}=25\times51$ ومرتبة آحاد هذا العدد هي 5 . من ذلك نرى أن مرتبة آحاد $(1+2+3+\dots+50)^3$ هي مرتبـــة آحـــاد $125=5^3$ وهي 5. ◆

لإيجاد مرتبة آحاد قوة عدد نحتاج إلى التجريب للحصول على نمط لقـــوى العدد.

**مثال (٢٥)** جد مرتبة آحاد $2009^{2012}$ .

**الحل**

لاحظ أن مرتبة آحاد 2009 هي 9 . مرتبة آحاد $2009^2$ هي مرتبة آحاد $9^2=81$ وهي 1 . مرتبة آحاد $2009^3$ هي مرتبة آحاد $1\times9=9$ وهي 9. مرتبة آحاد $2009^4$ هي مرتبة آحاد $9\times9=81$ وهي 1.

من ذلك، نرى أن مرتبة آحاد القوى الزوجية للعدد 2009 هي 1 ومرتبة آحاد القوى الفردية هي 9. إذن، مرتبة آحاد $2009^{2012}$ هي 1. ◆

**مثال (٢٦)** ما مرتبة آحاد العدد $2008^{2011}$ ؟

**الحل**

مفتاح الحل هو البحث عن نمط لمراتب آحاد قوى العدد 2008. ولانجاز ذلك لاحظ أن

مرتبة آحاد 2008 هي 8

مرتبة آحاد $2008^2$ هي 4

مرتبة آحاد $2008^3$ هي 2

مرتبة آحاد $2008^4$ هي 6

مرتبة آحاد $2008^5$ هي 8

إذن، مراتب آحاد القوى هي متتابعة دورية ... ,8, 4, 2, 6, 8 طول دورتها يساوي 4.

الآن، $2008^{2011} = 2008^{2008+3}$

$$= (2008^4)^{502} \times 2008^3$$

مرتبة آحاد $2008^{4\times 502}$ هي مرتبة آحاد $2008^4$ وهي 6 ومرتبة آحاد $2008^3$ هي 2.

إذن، مرتبة آحاد $2008^{2011}$ هي مرتبة آحاد $12 = 2 \times 6$ وهي 2. ◆

## مسائل محلولة

(١) القاسم المشترك الأكبر للعددين 252 و 198 هو:

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 9 (د) 18

(٢) ما هي العبارة الخاطئة من بين العبارات التالية ؟

(أ) يوجد عددان صحيحان $a$ و $b$ يحققان $a+b=500$ و $\gcd(a,b)=7$ .

(ب) $\gcd(a,a+1)=1$ لكل عدد صحيح $a$ .

(ج) $\gcd(a,a-2)=1$ لكل عدد صحيح فردي $a$ .

(د) $2 \mid (a^2+a)$ لكل صحيح موجب $a$ .

(٣) إذا كان $k$ عدداً صحيحاً موجباً فإن $\gcd(6k+5, 7k+6)$ يساوي:

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 5 (د) 6

(٤) عدد الأعداد الصحيحة $n$ في الفترة $500<n<2000$ التي تقبل القسمة على 21 هو:

(أ) 95 (ب) 72 (ج) 23 (د) 21

(٥) المضاعف المشترك الأصغر للعددين 101 و 13 هو :

(أ) 1313 (ب) 1317 (ج) 1319 (د) 1323

(٦) إذا كان $\gcd(a,b)=1$ فما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين $a+b$ و $a-b$ ؟

(أ) 1 و 3 (ب) 1 و 2 (ج) 2 و 3 (د) 2 و 7

(٧) إذا كان $x$ و $y$ عددين صحيحين ، فما أصغر قيمة موجبة للكسر $\frac{x}{30}+\frac{y}{36}$؟

(أ) $\frac{1}{30}$ (ب) $\frac{1}{36}$ (ج) $\frac{1}{90}$ (د) $\frac{1}{180}$ .

(٨) إذا كان $a$ عدداً فردياً فما قيمة $lcm(a,a+2)$ ؟

(أ) $a+2$ (ب) $1$ (ج) $a(a+2)$ (د) $\frac{a(a+2)}{2}$

(٩) إذا كان $\gcd(b,c)=1$ وكان $m\,|b$ فإن $\gcd(m,c)$ يساوي

(أ) $c$ (ب) $m$ (ج) $b$ (د) $1$

(١٠) إذا كان $n$ عدداً صحيحاً فما العبارات الخاطئة من بين العبارات التالية؟

(أ) $n^2=3k+2$ (ب) $n^2=3k$ أو $n^2=3k+1$

(ج) $n^2=4k+2$ (د) $n^2=4k$ أو $n^2=4k+1$

(١١)[AHSME 1951] ما أكبر عـــدد صحيح من بين الأعداد التالية الذي يقسم العدد $n^3-n$ لكل عدد صحيح $n$؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6

(١٢) [AHSME 1951] يقبل العدد الصحيح الذي على الصورة $abcabc$ القسمة على

(أ) 7 و 11 فقط (ب) 11 و 13 فقط (ج) 1001 (د) 101

(١٣) [AHSME 1976] إذا كانت بواقي قسمة كل من الأعداد 1059 ، 1417 ، 2312 على العدد $d$ متساوية ولتكن $r$ فما قيمة $d-r$؟

(أ) 15 (ب) 17 (ج) 19 (د) 23

(١٤) إذا كان $x$ و $y$ عددين صحيحين بحيث يقبل العدد $2x+3y$ القسمة على 17 فما العدد من بين الأعداد التالية الذي يقبل القسمة على 17؟

(أ) $2x+5y$ (ب) $9x+5y$

(ج) $9x+y$ (د) $3x+2y$

(١٥) [AIME 1986] ما أكبر عدد صحيح موجب $n$ بحيث يقبل العدد $n^3+100$ القسمة على $n+10$ ؟

(أ) 870 (ب) 880 (ج) 890 (د) 900

(١٦) العدد الثماني المكافيء للعدد السداسي $3425_6$ هو

(أ) $1453_8$ (ب) $2453_8$ (ج) $1463_8$ (د) $2253_8$

(١٧) [AHSME 1981] المرتبة الأخيرة (من اليسار ) للعدد $x=12112211122211112222_3$ في النظام التساعي (للأساس 9 ) هي

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(١٨) [Mathcounts 1986] ما قيمة المرتبة $A$ التي تجعل العدد $12A3B$ حيث $A \neq B$ يقبل القسمة على كل من 4 و 9 ؟

(أ) $A=3$ (ب) $A=2$ (ج) $A=1$ (د) $A=0$

(١٩) [Mandelbrot 3] ما أصغر عدد صحيح موجب أكبر من 1 الذي يكون باقي قسمته يساوي 1 عند قسمته على أي من الأعداد التي أكبر من 1 وأصغر من 10؟

(أ) 2520 (ب) 2521 (ج) 2522 (د) 2523

(٢٠) [Mathcounts 1984] ما أصغر عدد صحيح موجب $n$ إذا قسم على 4 يبقى 2 وإذا قسم على 5 يبقى 3 وإذا قسم على 7 يبقى 5 ؟

(أ) 128 (ب) 130 (ج) 138 (د) 140

(٢١) [AHSME 1967, MAΘ 2009] جمعنا العدد $2a3$ المكون من ثلاث مراتب مع العدد 326 فكان الناتج العدد المكون من ثلاث مراتب $5b9$ . إذا قبل العدد $5b9$ القسمة على العدد 9 فما قيمة $a+b$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٢٢) [Mathcounts 2010] إذا كان مجموع أول 20 عدد صحيح موجب زوجي يساوي مجموع أربعة أعداد زوجية متتالية . فما أكبر هذه الأعداد الأربعة المتتالية؟

(أ) 104 (ب) 106 (ج) 108 (د) 110

(٢٣) ما مجموع مراتب العدد العشري $5^{64}\times 8^{25}$ ؟

(أ) 6 (ب) 10 (ج) 14 (د) 18

(٢٤) [Mathcounts 2010] إذا كان $AB_9$ هو تمثيل عدد للأساس 9 وكان $BA_7$ هو تمثيل هذا العدد للأساس 7 فما التمثيل العشري لهذا العدد؟

(أ) 31 (ب) 34 (ج) 62 (د) 86

(٢٥) [AHSME 1967] لنفرض أن $12_b\times 51_b\times 16_b=(3146)_b$ .
ولنفرض أن $s_b=12_b+15_b+16_b$ . ما قيمة $s_b$؟

(أ) 38 (ب) 40 (ج) 42 (د) 44

(٢٦) [AMC10A 2003] لنفرض أن $AMC10$ و $AMC12$ عدداً مكوناً من خمسة مراتب حيث $AMC10+AMC12=123422$ .

ما قيمة $A+M+C$ ؟

(أ) 15 (ب) 14 (ج) 13 (د) 12

(٢٧) [$AMC10B$ 2006] ما مرتبة العشرات في المجموع

$$S=7!+8!+9!+\ldots+2006!$$

(أ) 1 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6

(٢٨) [$AMC10A$ 2008] لنفرض أن $<n>$ هو مجموع القواسم الموجبة للعدد الصحيح الموجب $n$ ما عدا العدد $n$ . ما قيمة $<<<6>>>$ ؟

(أ) 6 (ب) 12 (ج) 24 (د) 32

(٢٩) [$AHSME$ 1971] العددان الواقعان بين 60 و 70 اللذان يقسمان العدد $2^{48}-1$ هما

(أ) 61 و 63 (ب) 61 و 65

(ج) 63 و 65 (د) 63 و 67

(٣٠) [$AHSME$ 1970] لنفرض أن بواقي قسمة كل من الأعداد 13511 ، 13903 ، 14589 على العدد $m$ متساوية ويساوي كل منها $r$ . ما أكبر عدد صحيح $m$ يحقق ذلك؟

(أ) 28 (ب) 49 (ج) 98 (د) 108

(٣١) [$BritishJMC$ 1997] أي من الأعداد التالية ليس مضاعفاً للعدد 3 ؟

(أ) 234 (ب) 3456 (ج) 45678 (د) 567890

(٣٢) [$BritishJMC$ 1997] العدد المكون من أربع مراتب $86xy$ يقبل القسمة على كل من الأعداد 3 ، 4 ، 5 . ما قيمة $x+y$ ؟

(أ) 4 (ب) 6 (ج) 7 (د) 9

(٣٣) [*BritishJMC* 1999] ما باقي قسمة العدد 7000010 على العدد 7 ؟

(أ) 1　　(ب) 2　　(ج) 3　　(د) 4

(٣٤) [*BritishJMC* 1999] إذا كان العدد المكون من 8 مراتب $1234x678$ يقبل القسمة على 11 فما قيمة المرتبة $x$؟

(أ) 1　　(ب) 3　　(ج) 7　　(د) 9

(٣٥) [*BritishJMC* 2000] العدد المكون من خمس مراتب $d6d41$ يقبل القسمة على 9 . ما مجموع مراتبه ؟

(أ) 18　　(ب) 23　　(ج) 25　　(د) 27

(٣٦) ما مرتبة آحاد العدد $1436^{1433}$ ؟

(أ) 2　　(ب) 4　　(ج) 6　　(د) 8

(٣٧) ما مرتبة آحاد العدد $2004^{2012}$ ؟

(أ) 2　　(ب) 4　　(ج) 6　　(د) 8

(٣٨) ما مرتبة آحاد العدد $1432^{2011}$ ؟

(أ) 2　　(ب) 4　　(ج) 6　　(د) 8

(٣٩) ما مرتبة آحاد حاصل الضرب $2007^{81} \times 2006^{201}$ ؟

(أ) 2　　(ب) 3　　(ج) 4　　(د) 7

(٤٠) ما مرتبة آحاد المجموع $4^n + 4^{n+1}$ ؟

(أ) 0　　(ب) 1　　(ج) 2　　(د) 4

(٤١) [*Hamilton* 2006] ما مجموع مراتب أصغر عدد صحيح موجب مراتبه مأخوذة من 0 أو 1 فقط ويقبل القسمة على 12 ؟

(أ) 2　　(ب) 3　　(ج) 4　　(د) 5

(٤٢) [AHSME 1999] مجموع مراتب ناتج حاصل الضرب $2^{1999}\times 5^{2001}$ هو

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 5 (د) 7

(٤٣) [AMC10A 2008] إذا كان $k = 2008^2 + 2^{2008}$ فما مرتبة آحاد العدد $k^2 + 2^k$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٤٤) [MAΘ 2007] إذا كان العدد $6A6B$ يقبل القسمة على 72 فما حاصل ضرب جميع القيم الممكنة للمرتبة $A$ ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 14 (د) 16

(٤٥) [AMC10B 2007] ليكن $n$ أصغر عدد صحيح موجب يقبل القسمة على كل من العددين 4 و 9 ويستخدم المرتبتين 4 و 9 فقط على أن يحتوي على كل منهما مرة واحدة على الأقل. ما المراتب الأربعة الأولى من اليمين للعدد $n$ ؟

(أ) 4444 (ب) 4494 (ج) 4944 (د) 9944

(٤٦) [MAΘ 2009] ما باقي قسمة العدد $14414\times 14416\times 14418$ على العدد 14 ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 8

(٤٧) [Aust.MC 2003] ما أصغر عدد صحيح موجب $n$ بحيث يقبل العدد $10^n - 1$ القسمة على 63؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 8 (د) 9

(٤٨) العدد $2^{32}+1$ يقبل القسمة على

(أ) 97 (ب) 101 (ج) 257 (د) 641

(٤٩) إذا كانت $a$ ، $b$ ، $c$ أعداداً صحيحة موجبة حيث $\gcd(a,b)=1$ و $a+b$ يقبل القسمة على $c$ فإن $\gcd(a,c)$ يساوي

(أ) 1 (ب) 2 (ج) $a$ (د) $c$

(٥٠) [Aust.MCΘ 2002] لنفرض أن $N$ عدد مكون من مرتبتين وأن باقي قسمة 272758 على $N$ يساوي 13 وأن باقي قسمة 273437 على $N$ يساوي 17. ما مجموع مرتبتي $N$؟

(أ) 6 (ب) 9 (ج) 10 (د) 11

(٥١) [MAΘ 2009] ما باقي قسمة $5^{32}+9^{83}$ على العدد 6؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٥٢) [AMC10B 2002] ليكن $N^2=25^{54}\times 64^{25}$ حيث $N$ عدد صحيح موجب مجموع مراتب $N$ يساوي

(أ) 7 (ب) 14 (ج) 21 (د) 28

(٥٣) [Aust.MC 2002] ليكن $P$ عدداً مكوناً من 2002 مرتبة ويقبل القسمة على 18 . وليكن $Q$ مجموع مراتب $P$ و $R$ مجموع مراتب $Q$ و $S$ مجموع مراتب $R$ . العدد $S$ يساوي

(أ) 9 (ب) 18 (ج) 180 (د) 2002

(٥٤) [AMC10B 2002] ليكن $n$ عدداً صحيحاً موجباً حيث $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$ عدد صحيح. أي من العبارات التالية خاطئة ؟

(أ) $n$ يقبل القسمة على 2 (ب) $n$ يقبل القسمة على 3

(ج) $n<21$ (د) $n>34$

(٥٥) [*Aust,MC* 2001] لنفرض أن $m$ عدد صحيح بحيث يكون القاسم المشترك الأكبر لكل زوج من الأعداد $24, 42, m$ متساوٍ والمضاعف المشترك الأصغر لكل زوج من الأعداد $6, 15, m$ متساوٍ. ما قيمة $m$ ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 15 (د) 30

(٥٦)[*Aust.MC* 2001] إذا كان باقي قسمة $x$ على 12 يساوي باقي قسمة $x$ على 9 ويساوي 2 ، وكان $x$ يقبل القسمة على 7 فإن أصغر قيمة موجبة للعدد $x$ تقع في الفترة

(أ) بين 50 و 60 (ب) بين 60 و 100

(ج) بين 100 و 150 (د) بين 150 و 200

(٥٧) [*Aust, MC* 1997] أصغر عدد صحيح موجب $n$ بحيث يكون باقي قسمته على العدد 7 يساوي 4 وباقي قسمته على العدد 12 يساوي 5 يقع في الفترة :

(أ) بين 19 و 31 (ب) بين 32 و 42

(ج) بين 51 و 58 (د) بين 60 و 72

(٥٨) [*Aust. MC* 1993] إذا قسمنا العدد الصحيح $x > 8$ على كل من 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، يكون الباقي 1 . ما أصغر قيمة للعدد $x$ ؟

(أ) 840 (ب) 841 (ج) 1681 (د) 2522

(٥٩) [*Aust.MC* 1986] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ بحيث يقبل العدد $n^2+7$ القسمة على العدد $n+3$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٦٠) [*Aust.MC* 1982] إذا كان حاصل الجمع $5b2 + 3a6$ يقبل القسمة على 9 فما أكبر قيمة ممكنة لمجموع المرتبتين $a$ و $b$ ؟

(أ) 2 (ب) 9 (ج) 11 (د) 17

## حلول المسائل

| |
|---|
| (١) القاسم المشترك الأكبر للعددين 252 و 198 هو: |
| (أ) 3 (ب) 6 (ج) 9 (د) 18 |

**الحل**

الإجابة هي (د). لرؤية ذلك نستخدم خوارزمية إقليدس فنجد أن :

$$252 = 1\times198+54$$
$$198 = 3\times54+36$$
$$54 = 1\times36+18$$
$$36 = 2\times18+0$$

ومن ذلك يكون $\gcd(198, 252) = 18$ .

| |
|---|
| (٢) ما العبارة الخاطئة من بين العبارات التالية ؟ |
| (أ) يوجد عددان صحيحان $a$ و $b$ يحققان $a+b=500$ و $\gcd(a,b)=7$ . |
| (ب) $\gcd(a, a+1)=1$ لكل عدد صحيح $a$ . |
| (ج) $\gcd(a, a-2)=1$ لكل عدد صحيح فردي $a$ . |
| (د) $2 \mid (a^2+a)$ لكل صحيح موجب $a$ . |

**الحل**

العبارة الخاطئة هي (أ) لأنه لوكان $a+b=500$ و $\gcd(a,b)=7$ فإن $7\mid b$ و $7\mid a$ ومن ثم نرى أن $7\mid(a+b)$ . أي أن $7\mid500$ هذا مستحيل.

صواب (ب) نحصل عليه بملاحظة أن $1=(-a)+a+1$. لبرهان صواب (ج) ، نفرض أن $\gcd(a,a-2)=d$ . عندئذ ، $d \mid a$ و $d \mid (a-2)$ . إذن $d \mid 2$ . وبهذا فإن $d=1$ أو $d=2$ . وبما أن $a$ فردي فنرى أن $d=1$. أما صواب الفقرة (د) نحصل عليه بملاحظة أن $a^2+a=a(a+1)$ حاصل ضرب عددين متتاليين ومن ثم فهو عدد زوجي يقبل القسمة على 2.

| (٣) إذا كان $k$ عدداً صحيحاً موجباً فإن $\gcd(6k+5, 7k+6)$ يساوي: | | | |
|---|---|---|---|
| (أ) 1 | (ب) 2 | (ج) 5 | (د) 6 |

**الحل**

الاجابة هي (أ) : لاحظ أن

$$1=6\times(7k+6)+(-7)\times(6k+5)$$

ولذا ، يكون $\gcd(6k+5, 7k+6)=1$ .

| (٤) عدد الأعداد الصحيحة $n$ في الفترة $500<n<2000$ التي تقبل القسمة على 21 هو: | | | |
|---|---|---|---|
| (أ) 95 | (ب) 72 | (ج) 23 | (د) 21 |

**الحل**

الاجابة هي (ب): عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن 500 وتقبل القسمة على العدد 21 هو $\left[\frac{500}{21}\right]=23$ حيث $[x]$ تعني أكبر عدد

صحيح لا يزيد عن $x$. بالمثل ، عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن 2000 وتقبل القسمة على 21 هو $95 = \left[\frac{2000}{21}\right]$. إذن، عدد الأعداد الواقعة في الفترة $500 < n < 2000$ هو $72 = 23 - 95$.

| (٥) المضاعف المشترك الأصغر للعددين 101 و 13 هو : |
|---|
| (أ) 1313 (ب) 1317 (ج) 1319 (د) 1323 |

**الحل**

الإجابة هي (أ): استناداً إلى خوارزمية إقليدس نجد أن

$$101 = 7 \times 13 + 10$$
$$13 = 1 \times 10 + 3$$
$$10 = 3 \times 3 + 1$$
$$3 = 1.3 + 0$$

ولذا فإن $\gcd(101, 13) = 1$ . إذن، $lcm(101, 13) = \frac{101 \times 13}{1} = 1313$ .

| (٦) إذا كان $\gcd(a, b) = 1$ فما القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين $a+b$ و $a-b$ ؟ |
|---|
| (أ) 1 و 3 (ب) 1 و 2 (ج) 2 و 3 (د) 2 و 7 |

**الحل**

الإجابة هي (ب) : لنفرض أن $\gcd(a+b, a-b) = d$ . عندئذ ، $d \mid (a+b)$ و $d \mid (a-b)$ . من ذلك نجد أن $d \mid (a+b+a-b)$ و $d \mid (a+b-a+b)$ . أي أن، $d \mid 2a$ و $d \mid 2b$ .

لاحظ أن العـــددين $a$ و $b$ لا يمكـــن أن يكونـــا زوجـــيين معـــاً لأن $\gcd(a,b)=1$ .

إذا كان واحداً فقط من بين العددين $a$ و $b$ فردياً فإن كلاً من العـــددين $a+b$ و $a-b$ فردي. ومن ثم فإن $d$ فردي.

إذن، $\gcd(d,2)=1$ . وبهـــذا نجـــد أن $d \mid a$ و $d \mid b$ . ولكـــن $\gcd(a,b)=1$ . إذن، $d=1$ في هذه الحالة.

أما إذا كان العددان $a$ و $b$ فرديين فنرى أن $a-b$ و $a+b$ زوجيـــان . وبهذا فإن $d$ زوجي وليكن $d=2e$ . وبما أن $d \mid 2a$ و $d \mid 2b$ فنرى أن $e \mid a$ و $e \mid b$ . أي أن $e=1$ ويكون $d=2$ .

| |
|---|
| (٧) إذا كان $x$ و $y$ عددين صحيحين ، فما أصغر قيمـــة موجبـــة للكســـر $\frac{x}{30}+\frac{y}{36}$ ؟ |
| (أ) $\frac{1}{30}$ (ب) $\frac{1}{36}$ (ج) $\frac{1}{90}$ (د) $\frac{1}{180}$ . |

**الحل**

الإجابـــة هـــي (د) : لنفـــرض أن $\frac{x}{30}+\frac{y}{36}=z$ . عندئـــذ، $36x+30y=(30\times 36)z$ . لجعل $z$ موجباً وأصغر ما يمكن فيكفي أن نجعل $36x+30y$ موجباً وأصغر ما يمكن ، ولكن أصغر قيمـــة موجبـــة للمقدار $36x+30y$ هي $\gcd(36,30)=6$ . إذن،

القيمة الصغرى الموجبة للمقدار $\frac{x}{30}+\frac{y}{36}$ هي $\frac{6}{30\times 36}=\frac{1}{180}$ .

(٨) إذا كان $a$ عدداً فردياً فما قيمة $lcm(a,a+2)$ ؟

(أ) $a+2$ (ب) $1$ (ج) $a(a+2)$ (د) $\frac{a(a+2)}{2}$

**الحل**

الإجابة هي (ج) : بما أن $a$ عدد فردي فإن $\gcd(a,a+2)=1$ . وبهذا يكون $lcm(a,a+2)=\frac{a(a+2)}{1}=a(a+2)$ .

(٩) إذا كان $\gcd(b,c)=1$ وكان $m\,|\,b$ فإن $\gcd(m,c)$ يساوي

(أ) $c$ (ب) $m$ (ج) $b$ (د) $1$

**الحل**

الإجابة هي (د) : لنفرض أن $d=\gcd(m,c)$. عندئذ ، $d\,|\,c$ و $d\,|\,m$. وبما أن $m\,|\,b$ فنرى أن $d\,|\,b$ . إذن، $d=\gcd(b,c)=1$ .

ويمكن حل هذا التمرين بطريقة أخرى على النحو التالي:

بما أن $\gcd(b,c)=1$ فيوجد عددان صحيحان $r$ و $s$ بحيث يكون $rb+sc=1$ . وبما أن $m\,|\,b$ فنرى أن $b=mk$ . عندئذ، $(rk)m+sc=1$ . إذن، $\gcd(m,c)=1$ .

(١٠) إذا كان $n$ عدداً صحيحاً فما العبارات الخاطئة من بين العبارات التالية؟

(أ) $n^2=3k+2$ (ب) $n^2=3k$ أو $n^2=3k+1$

(ج) $n^2=4k+2$ (د) $n^2=4k$ أو $n^2=4k+1$

**الحل**

العبارتان الخاطئتان هما (أ) و (ج) .

استناداً إلى خوارزمية القسمة نجد أن $n = 3k$ أو $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$ . إذا كان $n = 3k$ فإن $n^2 = 3(3k^2)$ . أما إذا كان $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$ فإن $n^2 = 3M + 1$ . إذن العبارة (أ) خاطئة والعبارة (ب) صائبة.

أيضاً، باستخدام خوارزمية القسمة نرى أن $n = 2k$ أو $n = 2k + 1$ . إذا كان $n = 2k$ فإن $n^2 = 2(2k^2)$ . أما إذا كان $n = 2k + 1$ فإن $n^2 = 4M + 1$ إذن العبارة (ج) خاطئة والعبارة (د) صائبة.

(١١) [*AHSME* 1951] ما أكبر عدد صحيح من بين الأعداد التالية الذي يقسم العدد $n^3 - n$ لكل عدد صحيح $n$؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6

**الحل**

الاجابة هي (د) : لاحظ أولاً أن

$$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$$

وهذا حاصل ضرب ثلاثة أعداد متتالية . بما أن حاصل ضرب أي عددين متتاليين يقبل القسمة على 2 وأن حاصل ضرب ثلاثة أعداد متتالية يقبل القسمة على 3 نرى أن $n^3 - n$ يقبل القسمة على $lcm(2,3) = 6$ .

(١٢) [AHSME 1951] يقبل العدد الصحيح الذي على الصورة $abcabc$ القسمة على

(أ) 7 و 11 فقط (ب) 11 و 13 فقط (ج) 1001 (د) 101

**الحل**

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن

$$\begin{aligned} abcabc &= abc \times 10^3 + abc \\ &= abc(10^3 + 1) \\ &= abc \times 1001 \end{aligned}$$

(١٣) [AHSME 1976] إذا كانت بواقي قسمة كل من الأعداد 1059 ، 1417 ، 2312 على العدد $d$ متساوية ولتكن $r$ فما قيمة $d - r$؟

(أ) 15 (ب) 17 (ج) 19 (د) 23

**الحل**

الإجابة هي (أ) : بقسمة كل من الأعداد 1059 ، 1417 ، 2312 على $d$ نستطيع إيجاد $q_1$ ، $q_2$ ، $q_3$ بحيث يكون

$$1059 = q_1 d + r$$
$$1417 = q_2 d + r$$
$$2312 = q_3 d + r$$

من ذلك نجد أن

$$1417 - 1059 = 358 = (q_2 - q_1)d$$
$$2312 - 1417 = 895 = (q_3 - q_2)d$$

وبهـــذا نـــرى أن $d \mid 358$ و $d \mid 895$ . ولكـــن $358 = 2\times179$ و $895 = 5\times179$، إذن $d = 179$ . وباستخدام خوارزمية القسمة نرى أن

$$1059 = 5\times179+164$$

إذن، $r = 164$ . وبهذا يكون $d - r = 179 - 164 = 15$.

| (١٤) إذا كان $x$ و $y$ عددين صحيحين بحيث يقبل العدد $2x+3y$ القسمة على 17 فما العدد من بين الأعداد التالية الذي يقبل القسمة على 17؟ | |
|---|---|
| (أ) $2x+5y$ | (ب) $9x+5y$ |
| (ج) $9x+y$ | (د) $3x+2y$ |

**الحل**

الإجابة هي (ب) : لاحظ أن

$$9x+5y = 17x+17y-4(2x+3y)$$

وبما أن $17 \mid (17x+17y)$ و $17 \mid (2x+3y)$ نرى أن $17 \mid (9x+5y)$.

| (١٥) [AIME 1986] ما أكبر عدد صحيح موجب $n$ بحيث يقبل العدد $n^3+100$ القسمة على $n+10$ ؟ | | | |
|---|---|---|---|
| (أ) 870 | (ب) 880 | (ج) 890 | (د) 900 |

**الحل**

الإجابة هي (ج) : باستخدام خوارزمية القسمة نجد أن

$$n^3+100 = (n+10)(n^2-10n+100)-900$$

الآن، إذا كان $(n+10) \mid (n^3+100)$ فإن $(n+10) \mid 900$.

وبما أن $n$ أكبر ما يمكن عندما يكون $n+10$ أكبر ما يمكن وأن أكبر قاسم للعدد 900 هو 900 فنرى أن $n+10=900$ . أي أن $n=890$ .

(١٦) العدد الثماني المكافيء للعدد السداسي $3425_6$ هو

(أ) $1453_8$ (ب) $2453_8$ (ج) $1463_8$ (د) $2253_8$

**الحل**

الإجابة هي (أ) : بتحويل العدد $3425_6$ إلى النظام العشري نجد أن

$$\begin{aligned} 3425_6 &= 3\times 6^3 + 4\times 6^2 + 2\times 6 + 5 \\ &= 684 + 144 + 12 + 5 \\ &= 809 \end{aligned}$$

نقوم الآن بتحويل العدد العشري 809 إلى مكافئة في النظام الثماني فنرى بملاحظة أن $8^2=64$ و $8^3=512$ أن

$$\begin{aligned} 809 &= 512 + 297 = 8^3 + 4\times 64 + 43 \\ &= 8^3 + 4\times 8^2 + 5\times 8 + 3 \\ &= 1453_8 \end{aligned}$$

إذن، $3425_6 = 809 = 1453_8$ .

(١٧) [*AHSME* 1981] المرتبة الأخيرة (من اليسار ) للعدد $x = 12112211122211112222_3$ في النظام التساعي (للأساس 9 ) هي

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

$$\begin{aligned}x &= (12)(11)(22)(11)(12)(22)(11)(11)(22)(22)\\&= (1\times3+2)\times3^{18} + (1\times3+1).3^{16} + (2\times3+2)\times3^{14}\\&\quad + (1\times3+1)\times3^{12} + (1\times3+2)\times3^{10} + (2\times3+2)\times3^{8}\\&\quad + (1\times3+1)\times3^{6} + (1\times3+1)\times3^{4} + (2\times3+2)\times3^{2} + (2\times3+2)\\&= 5\times9^9 + 4\times9^8 + 8\times9^7 + 4\times9^6 + 5\times10^5\\&\quad + 8\times9^4 + 4\times9^3 + 4\times9^2 + 8\times9^1 + 8\\&= 5484584488_9\end{aligned}$$

ولذا فالمرتبة الأخيرة تساوي 5 .

(١٨) [*Mathcounts* 1986] ما قيمـــة المرتبة $A$ التي تجعل العدد $12A3B$ حيث $A \neq B$ يقبل القسمة على كل من 4 و 9 ؟

(أ) $A = 6$ (ب) $A = 2$ (ج) $A = 1$ (د) $A = 0$

**الحل**

الإجابة هي (ج) : بما أن العدد $12A3B$ يقبل القسمة على 9 فمجمـــوع المراتب يقبل القسمة على 9 . إذن، $A + B + 6$ يقبل القسمة على 9. وبمـــا أن هذا المجموع لا يساوي صفراً ولا يمكن أن يكون أكبر من 24 فنـــرى أن $a + b + 6 = 9$ أو $A + B + 6 = 18$ . أي أن، $A + B = 3$ أو $A + B = 12$ .
وبما أن العدد $12A3B$ يقبل القسمة على 4 فإن العدد $3B$ يقبل القســـمة على 4 . وبهذا يكون $B = 2$ أو $B = 6$ .
إذا كان $B = 6$ و $A + B = 3$ فإن $A = -3$ وهذا مستحيل.

إذا كان $B=6$ و $A+B=12$ فإن $A=6$ وهذا مستحيل أيضاً لأن $A\neq B$. إذن، $B=2$. ومن ثم $A=1$ أو $A=10$. وبما أن $A=10$ مرفوض فنجد أن $A=1$.

(١٩) [Mandelbrot 3] ما أصغر عدد صحيح موجب أكبر من 1 الذي يكون باقي قسمته يساوي 1 عند قسمته على أي من الأعداد التي أكبر من 1 وأصغر من 10؟

(أ) 2520 (ب) 2521 (ج) 2522 (د) 2523

**الحل**

الإجابة هي (ب): لنفرض أن $n$ هو العدد المطلوب. عندئذ، يقبل العدد $n-1$ القسمة على كل من الأعداد 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9.
وبما أن العدد الذي يقبل القسمة على 9 يقبل القسمة أيضاً على 3، والعدد الذي يقبل القسمة على 8 يقبل أيضا القسمة على 2 و 4. والعدد الذي يقبل القسمة على 2 و 3 يقبل القسمة على $6=3\times 2$.
إذن ، يكفي أن يقبل العدد $n-1$ القسمة على كل من الأعداد 5 ، 7 ، 8 ، 9. أصغر عدد صحيح موجب يحقق ذلك هو $9\times 8\times 7\times 5$.
إذن، $n-1=2520$ ومن ثم فإن $n=2521$.

(٢٠) [Mathcounts 1984] ما أصغر عدد صحيح موجب $n$ إذا قسم على 4 يبقى 2 وإذا قسم على 5 يبقى 3 وإذا قسم على 7 يبقى 5 ؟

(أ) 128 (ب) 130 (ج) 138 (د) 140

**الحل**

الإجابة هي (ج) : لنفرض أن العدد المطلوب هو $n$ . عندئذ، $n+2$ يقبل القسمة على كل من الأعداد 4 و 5 و 7 . أصغر عدد صحيح يحقق ذلك هو $140=7\times5\times4$ . إذن، $n+2=140$ وبهذا يكون $n=138$ .

(٢١) [*AHSME* 1967, *MAΘ* 2009] جمعنا العدد $2a3$ المكون من ثلاث مراتب مع العدد 326 فكان الناتج العدد المكون من ثلاث مراتب $5b9$ . إذا قبل العدد $5b9$ القسمة على العدد 9 فما قيمة $a+b$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

**الحل**

الإجابة هي (ج) : بما أن العدد $5b9$ يقبل القسمة على العدد 9 وأن $0\le b\le 9$ فنجد أن

$$\frac{5b9}{9}=\frac{5\times100+b\times10+9}{9}$$
$$=10\frac{(50+b)}{9}+1$$

يجب أن يكون عدداً صحيحاً . إذن، $\frac{50+b}{9}$ عدد صحيح. ومن ذلك نجد أن $b=4$ . الآن

$$2a3=5b9-326=549-326=223$$

وبهذا يكون $a=2$ وبالتالي فإن $a+b=2+4=6$ .

**حل آخر:**

بما أن $5b9$ يقبل القسمة على العدد 9 فإن $5+b+9$ يقبل القسمة على العدد 9. وبهذا نجد أن $b=4$. الآن ، نكمل الحل بصورة مشابهة للحل الأول.

(٢٢) [*Mathcounts* 2010] إذا كان مجموع أول 20 عدد صحيح موجب زوجي يساوي مجموع أربعة أعداد زوجية متتالية . فما أكبر هذه الأعداد الأربعة المتتالية؟

(أ) 104 (ب) 106 (ج) 108 (د) 110

**الحل**

الإجابة هي (ج) لاحظ أولاً أن

$$2+4+6+\ \dots\ +38+40=420$$

لنفرض أن $x$ هو أصغر الأعداد الزوجية المتتالية الأربعة . عندئذ،

$$x+(x+2)+(x+4)+(x+6)=420$$

ومن ذلك نجد أن $4x=408$ . وبهذا يكون $x=102$. إذن، أكبر هذه الأعداد هو $x+6=108$.

(٢٣) ما مجموع مراتب العدد العشري $5^{64}\times 8^{25}$ ؟

(أ) 6 (ب) 10 (ج) 14 (د) 18

**الحل**

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن

$$5^{64}\times 8^{25}=5^{64}\times 2^{75}=10^{64}\times 2^{11}$$

وبما أن العدد $10^{64}$ لا يؤثر على مجموع مراتب العدد فنرى أن مجموع مراتب العدد المطلوب يساوي مجموع مراتب العدد $2^{11}=2048$ . إذن، المجموع المطلوب هو $2+0+4+8=14$ .

(٢٤) [Mathcounts 2010] إذا كان $AB_9$ هو تمثيل عدد للأساس 9 وكان $BA_7$ هو تمثيل هذا العدد للأساس 7 فما التمثيل العشري لهذا العدد؟

(أ) 31 (ب) 34 (ج) 62 (د) 86

**الحل**

الإجابة هي (أ) : لاحظ أن

$$AB_9=(A\times 9+B)_{10}$$
$$BA_7=(B\times 7+A)_{10}$$

من ذلك نجد أن $9A+B=7B+A$. أي أن $A=\frac{3}{4}B$. وبهذا يكون $B=4$ و $A=3$.

الآن،

$$34_9=3\times 9+4=31$$

$$43_7=4\times 7+3=31$$

إذن، التمثيل العشري للعدد هو 31 .

(٢٥) [AHSME 1967] لنفرض أن $12_b\times 15_b\times 16_b=(3146)_b$.

ولنفرض أن $s_b=12_b+15_b+16_b$ . ما قيمة $s_b$؟

(أ) 38 (ب) 40 (ج) 42 (د) 44

**الحل**

الإجابة هي (د) : بما أن $12_b \times 15_b \times 16_b = (3146)_b$ فنرى أن

$$(b+2)(b+5)(b+6) = 3b^3 + b^2 + 4b + 6$$
$$b^3 + 13b^2 + 52b + 60 = 3b^3 + b^2 + 4b + 6$$
$$2b^3 - 12b^2 - 48b - 54 = 0$$
$$b^3 - 6b^2 - 24b - 27 = 0$$
$$(b-9)(b^2 + 3b + 3) = 0$$

وبما أن $b > 1$ فإن $b^2 + 3b + 3 \neq 0$ ويكون $b = 9$. إذن ،

$$s_b = (b+2) + (b+5) + (b+6) = 3b + 13 = 3b + b + 4$$
$$= 4b + 4 = (44)_b + (44)_9$$

(٢٦) [$AMC10A$ 2003] لنفرض أن كلاً من $AMC10$ و $AMC12$ عدد مكون من خمسة مراتب حيث $AMC10 + AMC12 = 123422$.
ما قيمة $A + M + C$ ؟

(أ) 15 (ب) 14 (ج) 13 (د) 12

**الحل**

الإجابة هي (ب) : لاحظ أن

$$AMC10 + AMC12 = 123422$$
$$AMC00 + AMC00 = 123400$$

ولذا فإن $AMC + AMC = 1234$. أي أن $AMC = \frac{1234}{2} = 617$.

وبما أن $A$ ، $M$ ، $C$ مراتب عدد فنرى أن $C = 7$، $M = 1$، $A = 6$.

إذن، $A + M + C = 6 + 1 + 7 = 14$.

(٢٧) [$AMC10B$ 2006] ما مرتبة العشرات في المجموع

$$S = 7!+8!+9!+ \dots + 2006!$$

(أ) 1 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6

**الحل**

الإجابة هي (ج) : لاحظ أولاً أن العدد $n!$ يقبل القسمة على العدد 100 لكل $n \geq 10$. وبهذا فمرتبتا الآحاد والعشرات في المجموع

$$10!+11!+\dots+2006!$$

هما 00 . الآن ، $7!+8!+9! = 5040+40320+362880 = 408240$

وبهذا، فمرتبة عشرات هذا المجموع (ومن ثم المجموع $S$ ) هي 4 .

(٢٨) [$AMC10A$ 2008] لنفرض أن $<n>$ هو مجموع القواسم الموجبة للعدد الصحيح الموجب $n$ ما عدا العدد $n$ . ما قيمة $<<<6>>>$ ؟

(أ) 6 (ب) 12 (ج) 24 (د) 32

**الحل**

الإجابة هي (أ) : لاحظ أن

$$<6> = 1+2+3 = 6$$
$$<<6>> = <6> = 6$$
$$<<<6>>> = <6> = 6$$

(٢٩) [$AHSME$ 1971] العددان الواقعان بين 60 و 70 اللذان يقسمان العدد $2^{48}-1$ هما

(أ) 61 و 63 (ب) 61 و 65

(ج) 63 و 65 (د) 63 و 67

**الحل**

الإجابة هي (ج) : بتحليل العدد $2^{48}-1$ نجد أن

$$\begin{aligned}2^{48}-1 &= (2^{24}-1)(2^{24}+1)\\ &= (2^{12}-1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)\\ &= (2^{6}-1)(2^{6}+1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)\\ &= 63\times 65\,(2^{12}+1)(2^{24}+1)\end{aligned}$$

إذن، العددان هما 63 و 65 .

(٣٠) [AHSME 1970] لنفرض أن بواقي قسمة كل من الأعداد 13511 ، 13903 ، 14589 على العدد $m$ متساوية ويساوي كل منها $r$ . ما أكبر عدد صحيح $m$ يحقق ذلك؟

(أ) 28 (ب) 49 (ج) 98 (د) 108

**الحل**

الإجابة هي (ج) : لنفرض أن $r$ هو باقي قسمة كل من الأعداد $a$، $b$ ، $c$ على العدد $m$ . عندئذ، استناداً على خوارزمية القسمة نستطيع إيجاد أعداد $q_1$ ، $q_2$ ، $q_3$ حيث

$$\begin{aligned}a &= q_1 m + r\\ b &= q_2 m + r\\ c &= q_3 m + r\end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن

$$a-b=(q_1-q_2)m$$
$$a-c=(q_1-q_3)m$$
$$b-c=(q_2-q_3)m$$

الآن ، كل من الفروقات $a-b$ ، $a-c$ ، $b-c$ يقبل القسمة على العدد $m$ . وبما أن $(a-b)-(a-c)+(b-c)=0$ فإن أي قاسم مشترك لأي فرقين يجب أن يقسم الفرق الثالث. وبهذا يكون القاسم المشترك الأكبر لأي فرقين هو أكبر عدد صحيح يحقق شروط المسألة.

عندما يكون $a=13903$ ، $b=13511$ ، $c=14589$ نحصل على الفرقين

$$13903-13511=392$$
$$14589-13903=686$$

وباستخدام خوارزمية إقليدس نجد أن

$$686=1\times392+294$$
$$392=1\times294+98$$
$$294=3\times98+0$$

إذن، $m=\gcd(392,686)=98$ .

(٣١) [*BritishJMC* 1997] أي من الأعداد التالية ليس مضاعفاً للعدد 3 ؟

(أ) 234 (ب) 3456 (ج) 45678 (د) 567890

**الحل**

الإجابة هي (د) : مجموع مراتب الأعداد هي

$2+3+4=9$ ، $3+4+5+6=18$ ، $4+5+6+7+8=30$ ،

$5+6+7+8+9+0=35$ . ولذا فالعدد الوحيد الذي لا يقبل القسمة على 3 هو 567890 .

(٣٢) [*BritishJMC* 1997] العدد المكون من أربع مراتب $86xy$ يقبل القسمة على كل من الأعداد 3 ، 4 ، 5 . ما قيمة $x+y$ ؟

(أ) 4 (ب) 6 (ج) 7 (د) 9

**الحل**

الإجابة هي (أ) : لكي يقبل العدد القسمة على 4 يجب أن يكون $y$ عدداً زوجياً. ولكي يقبل العدد القسمة على 5 يجب أن يكون $y=0$ أو $y=5$ . إذن $y=0$ . لكي يقبل العدد القسمة على 3 يجب أن يقبل مجموع المراتب $8+6+x+0=14+x$ القسمة على العدد 3. إذن، $x=1$ أو $x=4$ أو $x=7$ . ونحصل على الأعداد 8610 ، 8640 ، 8670. والعدد الوحيد من بينها الذي يقبل القسمة على 4 هو 8640 . إذن، $x+y=4+0=4$ .

(٣٣) [*BritishJMC* 1999] ما باقي قسمة العدد 7000010 على العدد 7 ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

**الحل**

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن

$3+7000007=7000010$ وأن العدد 7000007 يقبل القسمة على 7 .

إذن، الباقي هو 3 .

| (٣٤) [BritishJMC 1999] إذا كان العدد المكون من 8 مراتب $1234x678$ يقبل القسمة على 11 فما قيمة المرتبة $x$؟ | | | |
|---|---|---|---|
| (أ) 1 | (ب) 3 | (ج) 7 | (د) 9 |

**الحل**

الإجابة هي (د) : لكي يقبل العدد القسمة على 11 فيجب أن يقبل المجموع التناوبي $8-7+6-x+4-3+2-1=9-x$ القسمة على العدد 11. ولذا فإن $x=9$ (لاحظ أن $x$ مرتبة).

| (٣٥) [BritishJMC 2000] العدد المكون من خمس مراتب $d6d41$ يقبل القسمة على 9 . ما مجموع مراتبه ؟ | | | |
|---|---|---|---|
| (أ) 18 | (ب) 23 | (ج) 25 | (د) 27 |

**الحل**

الإجابة هي (د) : لكي يقبل العدد $d6d41$ القسمة على العدد 9 فيجب أن يقبل المجموع $2d+11$ القسمة على العدد 9. إذن،

$2d+11=18$ أو $2d+11=27$ .

إذا كان $2d+11=18$ فإن $d=3.5$ وهذا مستحيل لأن $d$ مرتبة. إذن، $2d+11=27$ ، والعدد هو 86841 . ومن ثم فإن مجموع مراتبه هو

$8+6+8+4+1=27$ .

(٣٦) ما مرتبة آحاد العدد $1436^{1433}$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

**الحل**

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن مرتبة آحاد 1436 هي 6 .

مرتبة آحاد $1436^2$ هي مرتبة أحاد $6^2$ وهي 6. مرتبة آحاد $1436^3$ هي مرتبة آحاد $6\times6$ وهي 6 وهكذا. إذن، مرتبة آحاد أي قوة للعدد 1436 هي نفس مرتبة آحاد 1436 وهي 6.

(٣٧) ما مرتبة آحاد العدد $2004^{2012}$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

**الحل**

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن

مرتبة آحاد 2004 هي 4 .

مرتبة آحاد $2004^2$ هي مرتبة آحاد $4^2$ وهي 6 .

مرتبة آحاد $2004^3$ هي مرتبة آحاد $4\times6$ وهي 4 .

مرتبة آحاد $2004^4$ هي مرتبة آحاد $4\times4$ وهي 6 .

من ذلك نجد أن مرتبة آحاد القوى الفردية للعدد 2004 هي 4 والقوى الزوجية هي 6 .

(٣٨) ما مرتبة آحاد العدد $1432^{2011}$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

مرتبة آحاد 1432 هي 2 .

مرتبة آحاد $1432^{2}$ هي مرتبة آحاد $2\times2$ وهي 4 .

مرتبة آحاد $1432^{3}$ هي مرتبة آحاد $2\times4$ وهي 8 .

مرتبة آحاد $1432^{4}$ هي مرتبة آحاد $2\times8$ وهي 6 .

مرتبة آحاد $1432^{5}$ هي مرتبة آحاد $2\times6$ وهي 2 .

إذن، مراتب آحاد قوى العدد 1432 هي متتابعة دورية ... $2, 4, 8, 6, 2,$ طول دورتها يساوي 4 . وبما أن $1432^{2011} = 1432^{4\times502}\times1432^{3}$ وأن مرتبة آحاد $1432^{2008}$ هي نفس مرتبة آحاد $1432^{4}$ وهي 6 وأن مرتبة آحاد $1432^{3}$ هي 8 . فإننا نخلص إلى أن مرتبة آحاد $1432^{2011}$ هي مرتبة آحاد $6\times8$ وهي 8 .

(٣٩) ما مرتبة آحاد حاصل الضرب $2006^{201}\times2007^{81}$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 7

**الحل**

الإجابة هي (أ) : مرتبة آحاد $2006^{201}$ هي 6 لأن مرتبة آحاد أي قوة لعدد مرتبة آحاده 6 هي 6 . ولايجاد مرتبة آحاد $2007^{81}$ لاحظ أن مرتبة آحاد 2007 هي 7 .

مرتبة آحاد $2007^2$ هي مرتبة آحاد $7\times7$ وهي 9.

مرتبة آحاد $2007^3$ هي مرتبة آحاد $7\times9$ وهي 3.

مرتبة آحاد $2007^4$ هي مرتبة آحاد $7\times3$ وهي 1 .

مرتبة آحاد $2007^5$ هي مرتبة آحاد $7\times1$ وهي 7.

إذن، مرتبة آحاد قوى العدد 2007 هي متتابعة دورية $7, 9, 3, 1, 7, \ldots$ طول دورها 4 . فمن ذلك نرى أن مرتبة آحاد $2007^{81} = 2007^{4\times20} \times 2007$ هي مرتبة آحاد $7\times1$ وهي 7 . ومن ثم مرتبة آحاد $2007^{81} \times 2006^{201}$ هي مرتبة آحاد $7\times6$ وهي 2.

| (٤٠) ما مرتبة آحاد المجموع $4^n + 4^{n+1}$ ؟ | | | |
|---|---|---|---|
| (أ) 0 | (ب) 1 | (ج) 2 | (د) 4 |

**الحل**

الإجابة هي (أ) :

لاحظ أولاً أن مرتبة آحاد $4^n$ هي 6 إذا كان $n$ زوجياً وهي 4 إذا كان $n$ فردياً. ولذا مرتبة آحاد $4^n + 4^{n+1}$ هي مرتبة آحاد $4+6$ (أو مرتبة آحاد $6+4$) وهي 0.

| (٤١) [*Hamilton* 2006] ما مجموع مراتب أصغر عدد صحيح موجب مراتبه مأخوذة من 0 أو 1 فقط ويقبل القسمة على 12 ؟ | | | |
|---|---|---|---|
| (أ) 2 | (ب) 3 | (ج) 4 | (د) 5 |

**الحل**

الإجابة هي (ب): يحتوي العدد على 3 مراتب 1 على الأقل لأن مجموع المراتب يجب أن يقبل القسمة على 3 . وبما أن العدد يقبل القسمة على 4 فمرتبتي الآحاد والعشرات هي 00 . إذن، أصغر هذه الأعداد هو 11100 ومجموع مراتبه هو $1+1+1+0+0=3$.

| |
|---|
| (٤٢) [$AHSME$ 1999] مجموع مراتب ناتج حاصل الضرب $2^{1999}\times5^{2001}$ هو |
| (أ) 2 (ب) 4 (ج) 5 (د) 7 |

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

$$2^{1999}\times5^{2001}=2^{1999}\times5^{1999}\times5^{2}=25\times10^{1999}$$

إذن ، العدد هو 000 ... 25000 حيث عدد الأصفار يساوي 1999.

وبهذا يكون مجموع مراتبه يساوي $2+5=7$ .

| |
|---|
| (٤٣) [$AMC10A$ 2008] إذا كان $k=2008^2+2^{2008}$ فما مرتبة آحاد العدد $k^2+2^k$ ؟ |
| (أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8 |

**الحل**

الإجابة هي (ج) : مرتبة آحاد $2008^2$ هي مرتبة آحاد $8^2=64$ وهي 4 .

مراتب آحاد قوى العدد 2 متتالية دورية طول دورها 4 وهي

$$2, 4, 8, 6, 2, \ldots$$

ولذا فمرتبة آحاد $2^{2008}$ هي مرتبة آحاد $2^4$ وهي $6$. إذن، مرتبة آحاد $k$ هي مرتبة آحاد $4+6=10$ وهي $0$. وبهذا فمرتبة آحاد $k^2$ هي $0$. الآن ، $k$ هو مضاعف للعدد $4$ ولذا فمرتبة آحاد $2^k$ هي مرتبة آحاد $2^4$ وهي $6$. من ذلك نرى أن مرتبة آحاد $k^2+2^k$ هي مرتبة آحاد $0+6=6$ وهي $6$.

(٤٤) [$MA\Theta$ 2007] إذا كان العدد $6A6B$ يقبل القسمة على $72$ فما حاصل ضرب جميع القيم الممكنة للمرتبة $A$؟

(أ) $10$ (ب) $12$ (ج) $14$ (د) $16$

**الحل**

الإجابة هي (ج) : بما أن $6A6B$ يقبل القسمة على $4$ فإن العدد $6B$ يقبل القسمة على $4$. وبهذا فإن $B=0,4,8$ . وبما أن $6A6B$ يقبل القسمة على $9$ فإن مجموع المراتب $6+A+6+B=A+B+12$ يقبل القسمة على $9$. إذا كان $B=0$ فإن $A+12$ يقبل القسمة على $9$. وبهذا فإن $A=6$ ويكون العدد $6A6B=6660$ وهذا مرفوض لأنه لا يقبل القمسة على $72$. أما إذا كان $B=4$ فإن $A+16$ يقبل القسمة على $9$. وبهذا فإن $A=2$ ويكون العدد $6264$ وهذا العدد يقبل القسمة على $72$. وأخيراً ، إذا كان $B=8$ فإن $A+20$ يقبل القسمة على $9$ وبهذا فإن $A=7$ ونحصل على العدد $6768$ وهذا أيضاً يقبل القسمة على $72$. إذن، $A=2$ أو $A=7$ وحاصل ضربهما هو $14=2\times 7$.

(٤٥) [$AMC10B$ 2007] ليكن $n$ أصغر عدد صحيح موجب يقبل القسمة على كل من العددين 4 و 9 ويستخدم المرتبتين 4 و 9 فقط على أن يحتوي على كل منهما مرة واحدة على الأقل. ما المراتب الأربعة الاولى من اليمين للعدد $n$ ؟

(أ) 4444 (ب) 4494 (ج) 4944 (د) 9944

**الحل**

الإجابة هي (ج) : بما أن العدد يقبل القسمة على 4 فمرتبتا آحاده وعشراته هما 44 . وبما أنه يقبل القسمة على 9 فمجموع مراتبه يقبل القسمة على 9. ولذا فمجموع مراتب المئات فصاعداً يجب أن يزيد بمقدار 1 عن مضاعف العدد 9. وللحصول على أصغر هذه الأعداد نحتاج إلى 7 أربعات و 9 واحدة.

أي أن أصغر هذه الأعداد هو 4444444944 . وبهذا فالمراتب الأربعة الأولى هي 4944.

(٤٦) [$MA\Theta$ 2009] ما باقي قسمة العدد $14418 \times 14416 \times 14414$ على العدد 14 ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 8

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

$$\frac{14414}{14}=\frac{7207}{7}$$
$$\frac{14416}{14}=\frac{7208}{7}$$
$$\frac{14418}{14}=\frac{7209}{7}$$

الآن ، باقي قسمة 7207 على 7 هو 4 و باقي قسمة 7208 على 7 هو 5 و باقي قسمة 7209 على 7 هو 6 .

إذن ، باقي قسمة العدد $14418\times14416\times14414$ على 14 هو باقي قسمة العدد $6\times5\times4$ على 14 وهذا الباقي يساوي 8 .

| (٤٧) [*Aust.MC* 2003] ما أصغر عدد صحيح موجب $n$ بحيث يقبل العدد $10^n-1$ القسمة على 63؟ | | | |
|---|---|---|---|
| (أ) 5 | (ب) 6 | (ج) 8 | (د)9 |

**الحل**

الإجابة هي (ب) : لاحظ أولاً أن $63=7\times9$ وأن $10^n-1=999...9$ يقبل القسمة على العدد9 . ولذا يكفي أن نجد أصغر عدد صحيح موجب $n$ بحيث يقبل العدد $10^n-1$ القسمة على 7 . وبتجريب الأعداد المعطاة نرى أن $10^5-1=99999$ لا يقبل القسمة على العدد 7 ولكن $10^6-1=999999=7\times142857$ يقبل القسمة على العدد 7. ولذا فإن أصغر عدد هو $n=6$.

(٤٨) العدد $2^{32}+1$ يقبل القسمة على

(أ) 97 (ب) 101 (ج) 257 (د) 641

**الحل**

الإجابة هي (د): لاحظ أولاً أن $641 = 2^4 + 5^4 = 5\times 2^7 + 1$

من ذلك نرى أن

$$\begin{aligned} 2^{32} &= 2^4 \times 2^{28} \\ &= (641-5^4)\times 2^{28} \\ &= 641\times 2^{28} - 5^4 \times 2^{28} \\ &= 641\times 2^{28} - (5\times 2^7)^4 \\ &= 641\times 2^{28} - (641-1)^4 \end{aligned}$$

ولكن المقدار $(641-1)^4 = 641m + 1$ حيث $m$ عدد صحيح. إذن

$$\begin{aligned} 2^{32} &= 641\times 2^{28} - 641m - 1 \\ &= 641(2^{28}-m)-1 \end{aligned}$$

وبهذا نجد أن 641 يقسم $2^{32}+1$.

(٤٩) إذا كانت $a$ ، $b$ ، $c$ أعداداً صحيحة موجبة حيث $\gcd(a,b)=1$ و $a+b$ يقبل القسمة على $c$ فإن $\gcd(a,c)$ يساوي

(أ) 1 (ب) 2 (ج) $a$ (د) $c$

**الحل**

الاجابة هي (أ) : لنفرض أن $\gcd(a,c)=d$ عندئذ، $d\,|\,c$ و $d\,|\,a$. وبما أن $c\,|\,(a+b)$ فإن $d\,|\,(a+b)$ و $d\,|\,a$ . إذن، $d\,|\,b$. وبما أن $\gcd(a,b)=1$ فنجد أن $d=1$.

(٥٠) [$AustMC$ 2002] لنفرض أن $N$ عدد مكون من مرتبتين وأن باقي قسمة 272758 على $N$ يساوي 13 وأن باقي قسمة 273437 على $N$ يساوي 17. ما مجموع مرتبتي $N$؟

(أ) 6 (ب) 9 (ج) 10 (د) 11

**الحل**

الإجابة هي (ب) : لاحظ أن

$$272758-13=272745=k_1N \quad (١)$$

$$273437-17=273420=k_2N \quad (٢)$$

حيث $k_1$ و $k_2$ عددان صحيحان . بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) نجد أن $675=(k_2-k_1)N$ . ولكن $k_2N=273420=675\times405+45$ .
إذن، 45 مضاعف للعدد $N$ . وبما أن $N>15$ فنرى أن $N=45$ .

(٥١) [$MA\Theta$ 2009] ما باقي قسمة $9^{83}+5^{32}$ على العدد 6؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

**الحل**

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن
باقي قسمة 9 على 6 هو 3 . باقي قسمة $9^2$ على 6 هو 3 .
باقي قسمة $9^3$ على 6 وهو 3 . من ذلك نرى أن باقي قسمة $9^{83}$ على 6 هو 3 .

أيضاً ، باقي قسمة 5 على 6 هو 5 . باقي قسمة $5^2$ على 6 هو 1 .
باقي قسمة $5^3$ على 6 هو 5 . باقي قسمة $5^4$ على 6 هو 1 .
إذن، باقي قسمة $5^{32}$ على 6 هو 1 . وبهذا يكون باقي قسمة $9^{83}+5^{32}$ على 6 هو $3+1=4$ .

(٥٢) [$AMC10B$ 2002] ليكن $N^2 = 25^{64} \times 64^{25}$ حيث $N$ عدد صحيح موجب. مجموع مراتب $N$ يساوي

(أ) 7 (ب) 14 (ج) 21 (د) 28

**الحل**

الإجابة هي (ب) : لاحظ أن $N^2 = \left(5^{64} \times 8^{25}\right)^2$. ومن ذلك نرى أن
$N = 5^{64} \times 8^{25} = 5^{64} \times 2^{75} = 2^{11} \times 10^{64} = 2048 \times 10^{64}$ .
إذن، مجموع مراتب $N$ هو $2+0+4+8=14$ .

(٥٣) [$Aust.MC$ 2002] ليكن $P$ عدداً مكوناً من 2002 مرتبة ويقبل القسمة على 18 . وليكن $Q$ مجموع مراتب $P$ و $R$ مجموع مراتب $Q$ و $S$ مجموع مراتب $R$ . العدد $S$ يساوي

(أ) 9 (ب) 18 (ج) 180 (د) 2002

**الحل**

الإجابة هي (أ) : لاحظ أن $Q \le 9 \times 2002 = 18018$.
من ذلك نرى أن عدد مراتب $Q$ لا يزيد عن 5 .
الآن ، $R \le 9 \times 5 = 45$ . إذن ، عدد مراتب $R$ لا يزيد عن 2 وأن $R \le 45$ . إذن، مجموع مراتب $R$ لا يزيد عن $3+9=12$ . وبهذا نجد أن

$S \leq 12$ ويقبل القسمة على 9 لأن كل من $P$ ، $Q$ ، $R$ يقبل القسمة على 9 . إذن، $S = 9$ .

(٥٤) [AMC10B 2002] ليكن $n$ عدداً صحيحاً موجباً حيث $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$ عدد صحيح. أي من العبارات التالية خاطئة ؟

(أ) $n$ يقبل القسمة على 2 (ب) $n$ يقبل القسمة على 3

(ج) $n < 21$ (د) $n > 34$

**الحل**

الإجابة هي (ج): بما أن $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$ فإن $0 < \frac{41}{42}+\frac{1}{n} < \frac{41}{42}+\frac{1}{1} < 2$

إذن، $\frac{41}{42}+\frac{1}{n}=1$ . وبهذا فإن $n = 42$ .

(٥٥) [Aust.MC 2001] لنفرض أن $m$ عدد صحيح بحيث يكون القاسم المشترك الأكبر لكل زوج من الأعداد $24, 42, m$ متساوٍ والمضاعف المشترك الأصغر لكل زوج من الأعداد $6, 15, m$ متساوٍ. ما قيمة $m$ ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 15 (د) 30

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أن $\gcd(24, 42) = 6$ . ولذا فإن $\gcd(24, m) = 6$ .

من ذلك نجد أن 6 يقسم $m$ . أيضاً، $lcm(6,15) = 30$ . ومنه فإن $lcm(6, m) = 30$ . وبهذا فإن $m$ يقسم 30 . إذن، $m = 30$ .

(٥٦)[*Aust.MC* 2001] إذا كان باقي قسمة $x$ على 12 يساوي باقي قسمة $x$ على 9 ويساوي 2 ، وكان $x$ يقبل القسمة على 7 فإن أصغر قيمة موجبة للعدد $x$ تقع في الفترة

(أ) بين 50 و 60 (ب) بين 60 و 100

(ج) 100 و 150 (د) بين 150 و 200

**الحل**

الإجابة هي (د) : بما أن $x-2$ يقبل القسمة على 9 و 12 فهو يقبل القسمة على المضاعف المشترك الأصغر لهما. أي يقبل القسمة على 36 . من ذلك نرى أن $x$ يزيد عن مضاعفات 36 بمقدار 2 . أي أن القيم الممكنة للعدد $x$ هي $38, 74, 100, 146, 182, 218, \ldots$ .

ولكن أصغر عدد يقبل القسمة على 7 من بين هذه الأعداد هو 182.

إذن، الاجابة هي (د).

(٥٧) [*Aust.MC* 1997] أصغر عدد صحيح موجب $n$ بحيث يكون باقي قسمته على العدد 7 يساوي 4 وباقي قسمته على العدد 12 يساوي 5 يقع في الفترة :

(أ) بين 19 و 31 (ب) بين 32 و 42

(ج) بين 51 و 58 (د) بين 60 و 72

**الحل**

الإجابة هي (ج) : بما أن

$$n = 12k + 5 = 7k + 5(k+1)$$

فإن باقي قسمة $n$ على 7 يساوي باقي قسمة $5(k+1)$ على 7 . الآن، بالتجريب نجد أن أصغر عدد صحيح $k$ بحيث يكون باقي قسمة $5(k+1)$ على 7 يساوي 4 هو العدد $k=4$ . إذن، $n = 12\times4+5 = 53$ .

(٥٨) [$Aust.MC$ 1993] إذا قسمنا العدد الصحيح $x > 8$ على كل من 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، يكون الباقي 1 . ما أصغر قيمة للعدد $x$ ؟

(أ) 840 (ب) 841 (ج) 1681 (د) 2522

**الحل**

الإجابة هي (ب) : لاحظ أن العدد $x-1$ يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 . ولذا فهو يقبل القسمة على المضاعف المشترك الأصغر وهو $840 = 7 \times 5 \times 3 \times 2^3$ .

إذن، أصغر قيمة للعدد $x$ هي $841 = 1 + 840$ .

(٥٩) [$Aust.MC$ 1986] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ بحيث يقبل العدد $n^2 + 7$ القسمة على العدد $n + 3$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

$$n^2 + 7 = (n+3)^2 - 6n - 2$$
$$= (n+3)^2 - 6(n+3) + 16$$

وبهذا فإن $n^2 + 7$ يقبل القسمة على $n + 3$ إذا وفقط إذا قبل العدد 16 القسمة على $n + 3$ . من ذلك نجد أن $n = 1$ أو $n = 5$ أو $n = 13$ . ومن ثم فعدد هذه الأعداد يساوي 3 .

**حل آخر :**

بمـــــا أن $(n+3)\,|\,(n^2+3n)$ و $(n+3)\,|\,(n^2+7)$ فـــــإن $(n+3)\,|\,(3n-7)$ . أيضاً ، $(n+3)\,|\,(3n+9)$ . إذن، $(n+3)\,|\,16$ . وبهذا يكون $n=1$ أو $n=5$ أو $n=13$ .

| |
|---|
| (٦٠) [*Aust.MC* 1982] إذا كان حاصل الجمع $6a3+2b5$ يقبل القسمة على 9 فما أكبر قيمة لمجموع المرتبتين $a$ و $b$ ؟ |
| (أ) 2 (ب) 9 (ج) 11 (د) 17 |

**الحل**

الإجابة هي (ج) :

$$\begin{aligned}6a3+2b5 &= 600+10a+3+200+10b+5\\ &= 9(89+a+b)+(a+b+7)\end{aligned}$$

بما أن $0\le a\le 9$ و $0\le b\le 9$ فإن $0\le a+b\le 18$ . وبمـــا أن $a+b+7$ يقبل القسمة على 9 فإن $a+b=2$ أو $a+b=11$ . إذن، أعلى قيمة هي 11 .

## مسائل غير محلولة

(١) ما قيمة $\gcd(1769, 2378)$ ؟

(أ) 23 (ب) 25 (ج) 27 (د) 29

(٢) إذا كان $n$ عدداً صحيحاً موجباً فما القاسم المشترك الأكبر للعددين $12n+1$ و $30n+2$ ؟

(أ) 1 (ب) 3 (ج) $6n+1$ (د) $12n+1$

(٣) ما قيمة $lcm(117, 165)$ ؟

(أ) 6430 (ب) 6435 (ج) 6440 (د) 6445

(٤) إذا كان $\gcd(a,b)=1$ وكان $c\,|(a+b)$ فإن:

(أ) $\gcd(a,c)\neq\gcd(b,c)$.

(ب) $\gcd(b,c)=1$ و $\gcd(a,c)=2$

(ج) $\gcd(a,c)=1$ و $\gcd(b,c)=1$

(د) $\gcd(b,c)=\gcd(a,c)=1$

(٥) ما القاسم المشترك الأكبر للعددين $n!+1$ و $(n+1)!+1$ ؟

(أ) $n!$ (ب) $n!+1$ (ج) $(n+1)!$ (د) $1$

(٦) إذا كان $a$ عدداً صحيحاً زوجياً فما قيمة $lcm(a,a+2)$ ؟

(أ) $a(a+2)$ (ب) $\frac{1}{2}a(a+2)$ (ج) $a$ (د) $a+2$

(٧) [*HMMT* 2002] ما $\gcd(2002+2,\ 2002^2+2,\ 2002^3+2)$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6

(٨) ما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية:

(أ) $n^3-n$ يقبل القسمة على 3 لكل عدد صحيح $n$

(ب) $n^4-n$ يقبل القسمة على 4 لكل عدد صحيح $n$

(ج) $n^6-n$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد صحيح $n$

(د) $n^8-n$ يقبل القسمة على 8 لكل عدد صحيح $n$

(٩) لكل عدد صحيح $n$ ، يقبل العدد $n^5-5n^3+4n$ القسمة على:

(أ) 79 (ب) 81 (ج) 93 (د) 120

(١٠) [*Mathcounts* 1986] ما مرتبة آحاد العدد $3^{1986}-2^{1986}$ ؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 7 (د) 9

(١١) [*Mathcounts* 1991] إذا كان باقي قسمة العدد $n$ على 5 يساوي 1 فما باقي قسمة العدد $3n$ على 5 ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(١٢) [*Mathcounts* 1986] إذا كان $n=1111111111_2$ فما عدد مراتب $(3n)_2$ ؟

(أ) 12 (ب) 14 (ج) 20 (د) 30

(١٣) [*AHSME* 1954] إذا طرحنا العدد 8 من القاسم المشترك الأكبر للعددين 132 و 6432 فما العدد المتبقي؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(١٤) [*AHSME* 1956] إذا كان $n$ عدداً صحيحاً موجباً فالعـــدد $n^2(n^2-1)$ يقبل دائما القسمة على :

(أ) 12 (ب) 24 (ج) $12-n$ (د) 12 و 24 .

(١٥) [*AHSME* 1957] العدد العشري المكافيء للعدد الثنائي $10011_2$ هو

(أ)7 (ب) 11 (ج) 19 (د) 40

(١٦) [*AHSME* 1957] ليكن $x=ab$ عدداً مكوناً من مرتبتين عشريتين. العدد $x^2-(ba)^2$ لا يمكن أن يقبل القسمة على

(أ) 9 (ب) حاصل ضرب المرتبتين $a$ و $b$

(ج) 11 (د) حاصل جمع أو فرق المرتبتين $a$ و $b$

(١٧) [*AHSME* 1957] ليكن $N$ عـــدداً مكونـــاً مـــن مـــرتبتين عشـــريتين وليكن $M$ العدد الذي نحصل عليه من $N$ بتبديل موقعي المرتبتين. إذا كان $M-N$ مكعباً فإنه

(أ) لا يمكن أن تكون مرتبة آحاد $N$ تساوي 5

(ب)من الممكن أن تساوي مرتبة آحاد $N$ أي مرتبة ما عدا المرتبة 5

(ج) توجد 7 قيم للعدد $N$

(د) توجد 10 قيم للعدد $N$

(١٨) [*Mathcounts* 2009] كم عدد القواسم الصحيحة الموجبة للعدد 196؟

(أ) 10 (ب) 9 (ج) 8 (د) 7

(١٩) [*Mathcounts* 2010] ما مجموع مراتب آحاد الأعداد بين 0 و 50 الـــتي تقبل القسمة على العدد 3 ؟

(أ) 33 (ب) 45 (ج) 60 (د) 78

(٢٠) [AHSME 1960] لنفرض أن $m$ و $n$ عددان صحيحان فرديان حيث $n < m$ . ما أكبر قاسم للعدد $m^2 - n^2$ من بين الأعداد التالية؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٢١) ما قيم باقي قسمة مربع عدد صحيح على العدد 6؟

(أ) 0,1 فقط (ب) $0, 2$ (ج) $0,1,3$ (د) $0,1, 3, 4$

(٢٢) [ASMHE 1966] عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 1000 ولا تقبل القسمة على أي من العددين 5 و 7 يساوي :

(أ) 688 (ب) 686 (ج) 684 (د) 658

(٢٣) إذا قبل كل من العددين $a+2$ و $b-12$ القسمة على العدد 10 فيقبل العدد $a+b$ القسمة على:

(أ) 2 فقط (ب) 5 فقط (ج) 10 (د) 7

(٢٤) ما هي العبارة الخاطئة من بين العبارات التالية ؟

(أ) يقبل العدد $121^{13} - 101^4$ القسمة على العدد 2

(ب) $1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$

(ج) يقبل العدد $326^2 - 325^2$ القسمة على العدد 3

(د) يقبل العدد 65314638792 القسمة على العدد 24

(٢٥) [AHSME 1968] ليكن $P$ هو حاصل ضرب أي ثلاثة أعداد صحيحة موجبة فردية متتالية. أكبر عدد صحيح يقسم $P$ هو

(أ) 15 (ب) 6 (ج) 5 (د) 3

(٢٦) ليكن $n$ عدداً صحيحاً موجباً حيث $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$ عدد صحيح. ما العبارة الخاطئة من بين العبارات التالية ؟

(أ) يقبل $n$ القسمة على العدد 2

(ب) يقبل $n$ القسمة على العدد 3

(ج) يقبل $n$ القسمة على العدد 7

(د) العدد $n$ أكبر من العدد 84

(٢٧) [AMC8 2007] ليكن $\boxed{n}$ هو مجموع القواسم الموجبة للعدد الموجب $n$ . ما قيمة $\boxed{\boxed{11}}$ ؟

(أ) 13 (ب) 20 (ج) 24 (د) 28

(٢٨) [AMC10 2000] لتكن $I$ ، $M$ ، $O$ ثلاثة أعداد صحيحة موجبة مختلفة حيث $I \times M \times O = 2001$ . ما هي أعلى قيمة ممكنة للمجموع $I + M + O$؟

(أ) 671 (ب) 111 (ج) 99 (د) 24

(٢٩) إذا كان $n$ عدداً صحيحاً زوجياً فإن العدد $n(n+1)(n+2)$ يقبل القسمة على

(أ) 2 فقط (ب) 3 فقط (ج) 8 فقط (د) 24

(٣٠) [AMC10 2000] متتالية فيبوناتشي $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ .
حدها الأول والثاني يساوي 1 وكل حد بعد ذلك هو مجموع الحدين السابقين له . ما المرتبة من بين المراتب العشرة التي تكون آخر من يظهر كمرتبة آحاد عدد فيبوناتشي ؟

(أ) 0 (ب) 4 (ج) 6 (د) 7

(٣١) [$AMC10 \quad 2001$] ليكن $S(n)$ و $P(n)$ هو مجموع وحاصل ضرب مراتب العدد الصحيح $n$ على التوالي. إذا كان $N$ عدداً مكوناً من مرتبتين حيث $N = P(N) + S(N)$ فما مرتبة آحاد $N$؟

(أ) 9 (ب) 8 (ج) 6 (د) 3

(٣٢) إذا كان $b + c = 9$ فما هو باقي قسمة $b \times 10^5 + c \times 10^3$ على العدد 9؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٣٣) ما العبارة الخاطئة من العبارات التالية ؟

(أ) إذا كان $n = 4k + 1$ عدداً صحيحاً موجباً فإن $n^2 - 1$ يقبل القسمة على العدد 8 .

(ب) $n^3 - 1$ يقبل القسمة على $n^2 + n + 1$ لكل عدد صحيح موجب $n$ .

(ج) $nm + n + m + 1$ يقبل القسمة على $n + 1$ لكل عددين صحيحين موجبين $n$ و $m$.

(د) $n^2 - 2$ يقبل القسمة على العدد 3 لكل عدد صحيح $n$ .

(٣٤) [$AMC10 \quad 2001$] لنفرض أن $n$ هو حاصل ضرب ثلاثة أعداد صحيحة متتالية وأن $n$ يقبل القسمة على العدد 7 . ما العدد من بين الأعداد التالية الذي يمكن أن لا يقبل $n$ القسمة عليه؟.

(أ) 6 (ب) 21 (ج) 28 (د) 42

(٣٥) [$AMC12A \quad 2008$] لنفرض أن $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6}$ عدد صحيح. ما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية؟

(أ) $x$ عدد صحيح سالب.

(ب) $x$ عدد زوجي ولكنه ليس بالضرورة مضاعفاً للعدد 3 .

(ج) $x$ مضاعف للعدد 3 ولكنه ليس بالضرورة زوجياً.

(د) يجب أن يكون $x$ مضاعفاً للعدد 12.

(٣٦) [$AMC12B$ 2010] ليكن $n$ هو أصغر عدد صحيح موجب يقبل القسمة على 20 بحيث يكون $n^2$ مكعباً و $n^3$ مربعاً. ما عدد مراتب $n$؟

(أ) 8 (ب) 7 (ج) 6 (د) 5

(٣٧) لنفرض أن العدد الصحيح $n$ يقبل القسمة على كل من الأعداد 3 و 5 و 12 . العدد الصحيح الذي يلي $n$ ويقبل القسمة على الأعداد 3 ، 5 ، 12 هو

(أ) $n+3$ (ب) $n+5$ (ج) $n+12$ (د) $n+60$

(٣٨)إذا كان $n$ عدداً صحيحاً موجباً ، فما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية؟

(أ) $\gcd(2n, 3n) = n$ و $\gcd(n, 2n+1) = 1$

(ب) $\gcd(2n, 3n) = 1$ و $\gcd(n, 2n+1) = n$

(ج) $\gcd(2n,3n) = \gcd(n, 2n+1) = 1$

(د) $\gcd(2n, 3n) = \gcd(n, 2n+1) = n$

(٣٩) [$AHSME$ 1978] لنفرض أن $S = 1!+2!+3!+...+99!$. ما مرتبة آحاد العدد $S$ ؟

(أ) 9 (ب) 8 (ج) 5 (د) 3

(٤٠) [*AHSME* 1969] إذا كان $N = 11000_2$ فما هي قيمة العدد $N - 1$ للأساس 2؟

أ) 10001 ب) 10011 ج) 10111 د) 10110

(٤١) [*British JMC* 2003] ثلاثة من بين الأعداد الأربعة التالية لها نفس الباقي عند قسمتها على العدد 9 وأما الرابع فباقي قسمته على 9 فهو مختلف. ما هذا العدد؟

أ) 257 ب) 554 ج) 725 د) 861

(٤٢) أي من الأعداد التالية ليس مضاعفاً للعدد 4 ؟

أ) 192 ب) 212 ج) 318 د) 424

(٤٣) ما أصغر عدد صحيح موجب مكون من ست مراتب ويقبل القسمة على كل من 8 و 9 ؟

أ) 100008 ب) 100006 ج) 800001 د) 100016

(٤٤) ما باقي قسمة العدد 123456789 على العدد 11 ؟

أ) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6

(٤٥) ما مرتبة آحاد العدد $1435^{1433}$ ؟

أ) 0 ب) 3 ج) 5 د) 9

(٤٦) ما مرتبة آحاد العدد $1433^{1435}$ ؟

أ) 2 ب) 3 ج) 5 د) 7

(٤٧) ما مرتبة آحاد حاصل الضرب $1477^{1435} \times 1433^{1435}$ ؟

أ) 1 ب) 3 ج) 6 د) 7

(٤٨) ما مرتبة آحاد $^2(1436^2+2014^2)$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٤٩) ما مرتبة آحاد المجموع $7^{203}+7^{202}+7^{201}+7^{200}$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 7

(٥٠) ما مرتبة آحاد $6^{n+3}+6^{n+1}+6^n$ ؟

(أ)4 (ب) 6 (ج) 8 (د) 9

(٥١) [2001 AMC10] لنفرض أن $n$ حاصل ضرب ثلاث أعداد صحيحة متتالية وأن $n$ يقبل القسمة على العدد 7 . أي من الاعداد التالية يمكن أن لا يقسم $n$ ؟

(أ) 6 (ب) 14 (ج) 21 (د) 2

(٥٢) [2009 $MA\Theta$] يقبل العدد $2^{48}-1$ القسمة بالضبط على عددين بين 60 و 70 . ما مجموع هذين العددين ؟

(أ) 125 (ب) 126 (ج) 127 (د) 128

(٥٣) [British SMC 2001] واحد فقط من بين الأعداد التالية يقبل القسمة على العدد 11. ما هو ؟

(أ) $10^7-11$ (ب) $10^7-1$ (ج) $10^7+1$ (د) $10^7+11$

(٥٤) [2001 Aust.MC] أكبر عدد صحيح مكون من مرتبتين بحيث يمكن كتابته كمجموع مربعين مختلفين هو

(أ)96 (ب) 97 (ج) 98 (د) 99

(٥٥) [2011 $MA\Theta$] ما عدد أزواج المراتب $(A,B)$ بحيث يقبل العدد $123A782B$ القسمة على كل من 2 و 3؟

(أ) 14 (ب) 16 (ج) 18 (د) 20

(٥٦) [Maclaurin 2006] ما مجموع مراتب أصغر عدد صحيح موجب يقبل القسمة على 35 وجميع مراتبه متساوية؟

(أ) 20 (ب) 25 (ج) 30 (د) 35

(٥٧) [$MA\Theta$ 2009] قسمنا العدد 100 على شكل مجموع عددين أحدهما يقبل القسمة على 7 والآخر يقبل القسمة على 11. ما حاصل ضرب هذين العددين؟

(أ) 2448 (ب) 2464 (ج) 2664 (د) 2848

(٥٨) [Aust.MC 1995] ما مرتبة آحاد المجموع $7^{13}+3^{17}$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 3 (د) 7

(٥٩) [Aust. MC 1978] إذا كان $x=(n+1)(n+2)(n+3)$ حيث $n$ عدد صحيح موجب. فما العدد من بين الأعداد التالية الذي ربما لا يقسم العدد $x$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 6

(٦٠) [British SMC 2002] ما باقي قسمة حاصل الضرب $123456789\times987654321$ على العدد 6؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

## إجابات المسائل غير المحلولة

| رقم السؤال | الإجابة | رقم السؤال | الإجابة | رقم السؤال | الإجابة | رقم السؤال | الإجابة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | د | ٢ | أ | ٣ | ب | ٤ | د |
| ٥ | د | ٦ | ب | ٧ | د | ٨ | أ |
| ٩ | د | ١٠ | ب | ١١ | ج | ١٢ | أ |
| ١٣ | ب | ١٤ | أ | ١٥ | ج | ١٦ | ب |
| ١٧ | ج | ١٨ | ب | ١٩ | د | ٢٠ | د |
| ٢١ | د | ٢٢ | ب | ٢٣ | ج | ٢٤ | ب |
| ٢٥ | د | ٢٦ | د | ٢٧ | د | ٢٨ | أ |
| ٢٩ | د | ٣٠ | ج | ٣١ | أ | ٣٢ | أ |
| ٣٣ | د | ٣٤ | ج | ٣٥ | ب | ٣٦ | ب |
| ٣٧ | د | ٣٨ | أ | ٣٩ | د | ٤٠ | ج |
| ٤١ | د | ٤٢ | ج | ٤٣ | أ | ٤٤ | ج |
| ٤٥ | ج | ٤٦ | د | ٤٧ | أ | ٤٨ | ب |
| ٤٩ | أ | ٥٠ | ب | ٥١ | د | ٥٢ | د |
| ٥٣ | ج | ٥٤ | ب | ٥٥ | ب | ٥٦ | ج |
| ٥٧ | ب | ٥٨ | أ | ٥٩ | ج | ٦٠ | ج |

# الفصل الثاني

## الأعداد الأولية والمبرهنة الأساسية في الحساب

***Primes and The Fundamental Theorem of Arithmetic***

عرفنا العدد الأولي $p$ في الفصل الأول على أنه عدد صحيح أكبر من 1 وله قاسمان بالضبط هما 1 و $p$ . وإذا كان العـــدد الصحيح غير أولي وأكـــبر مـــن 1 فنقـــول إنه عـــدد مؤلف *(composite number)* . أي أن $n$ عـــدد مؤلـــف إذا استطعنا كتابة $n$ على الصورة $n = a.b$ حيث $1 < a,b < n$ .

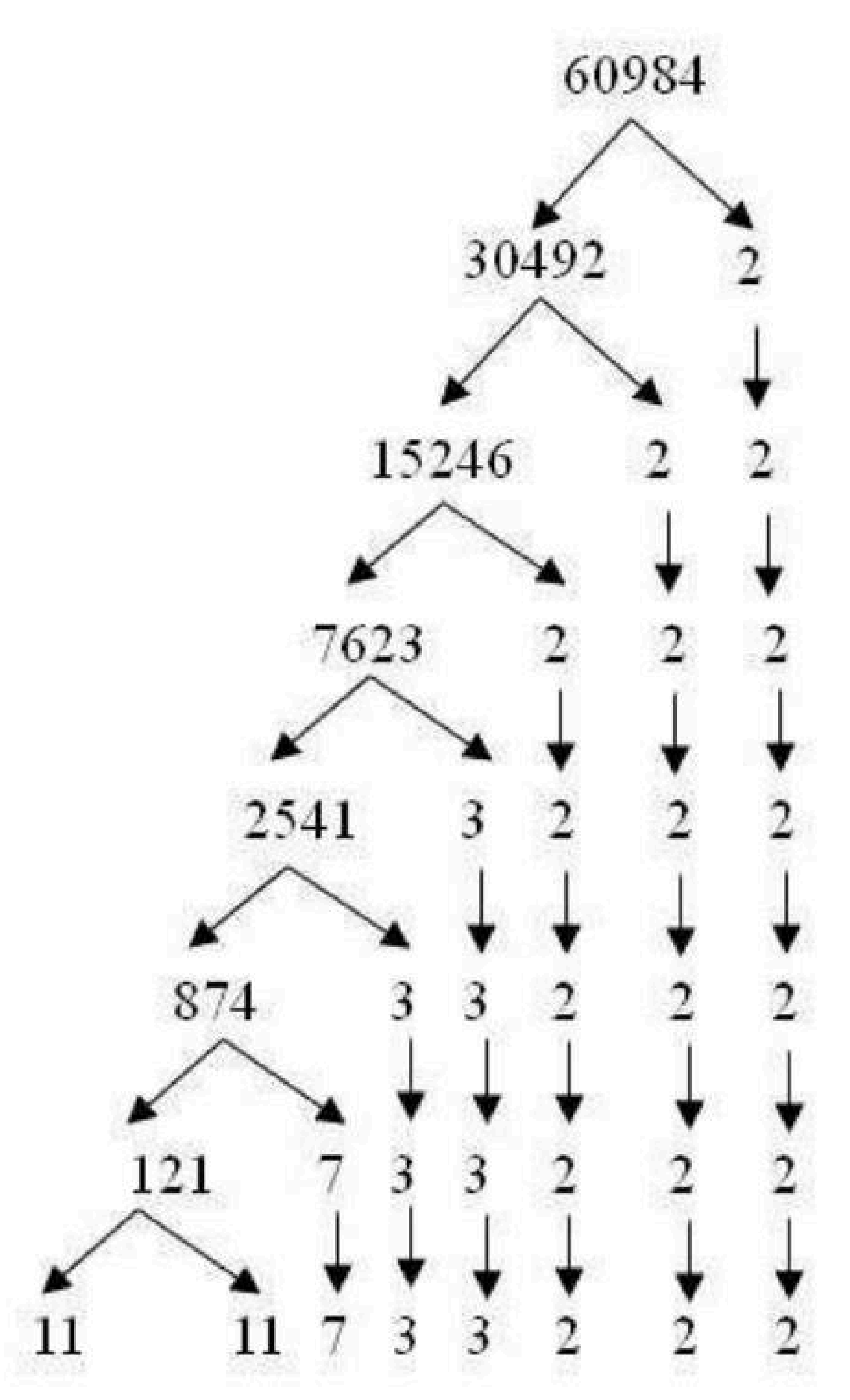
نقدم الآن بعض الحقائق المهمة التي تتعلق بالأعداد الأولية.

(١) إحدى أهم الحقائق هي المبرهنة الأساسية في الحساب التي تنص على: يمكن كتابة أي عدد صحيح أكبر من 1 بطريقة وحيدة ، كحاصل ضرب قـــوى أعداد أولية مختلفة.

**مثال (١)** اكتب العدد 60984 كحاصل ضرب قوى أعداد أولية.

**الحل**

إحدى الطرق المستخدمة لإيجاد القواسم الأولية هي شجرة القواسم الـــتي تُستخدم فيها اختبارات القسمة على الأعداد الأولية الصغيرة التي قدمناها في الفصل الأول




إذن، $60984 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11^2$ . ◆

أما الحقيقة الثانية فهي:

(٢) عدد الأعداد الأولية غير منته. أي أن مجموعة الأعداد الأولية هي:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, ....$$

لاحظ أن جميع الأعداد الأولية فردية ما عدا العدد الأولي 2 .

يمكن استخدام الحقيقة التالية كاختبار لأولية العدد.

(٣) إذا كان $n$ عدداً مؤلفاً فإنه يوجد له قاسم أولي $p$ حيث $p \leq \sqrt{n}$ .

يمكن إعادة نص الحقيقة (٣) على النحو التالي:

(٣)* إذا كان $n > 1$ عدداً صحيحاً بحيث لا يوجد له أي قاسم أولي أصغر من أو يساوي $\sqrt{n}$ فإن $n$ يجب أن يكون عدداً أولياً.

تستخدم الحقيقة (٣) (أو (٣)* ) كأحد اختبارات العدد الأولي بحيث يمكن تنفيذ هذا الاختبار بقسمة العدد $n$ على جميع الأعداد الأولية التي لا تزيد عن $\sqrt{n}$ فإن لم يكن أي منها قاسماً للعدد $n$ فإننا نستنتج أن $n$ عدد أولي.

**مثال (٢)** هل العدد 103 أولي؟

**الحل**

لاحظ أن $\sqrt{103} < 11$ . ولذا فإننا نقوم بإختبار قابلية قسمة العدد 103 على الأعداد الأولية $2, 3, 5, 7$ وذلك بالاستعانة باختبارات القسمة المقدمة في الفصل الأول لنجد أن العدد 103 لا يقبل القسمة على أي منها. بذلك يكون 103 عدداً أولياً. ◆

يمكن الإستعانة أيضاً بالحقيقة (٣) لإيجاد جميع الأعداد الأولية التي لا تزيد عن عدد معطى $n$ . وتدعى هذه الطريقة بمرشحة اراتوسثيتس *(The Sieve of Eratosthenes)* ويتم تنفيذها على النحو التالي:

لإيجاد الأعداد الأولية التي لا تزيد عن 100 نقوم بكتابة الأعداد من 2 إلى 100. بما أن 2 عدد أولي فإننا نضع دائرة حوله ونقوم بشطب جميع مضاعفاته (الأعداد الزوجية) . بعد ذلك نضع دائرة حول العدد 3 ونقوم بشطب كل ثالث عدد بعد ذلك (مضاعفات العدد 3 ) . نتقل بعد ذلك بوضع دائرة حول العدد 5 ونشطب مضاعفاته ثم نضع دائرة حول العدد 7 ونشطب مضاعفاته . نتوقف هنا

لأننا قمنا بشطب جميع مضاعفات الأعداد الأولية $2,3,5,7$ الــتي أصــغر مــن $\sqrt{100}$ ويتبقى لدينا قائمة الأعداد الأولية التي لا تزيد عن 100 وهي:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 11 |
| 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
| 31 | 37 | 41 | 43 | 47 |
| 53 | 59 | 61 | 57 | 71 |
| 73 | 79 | 83 | 89 | 97 |

يمكن استخدام تحليل العدد إلى قوى عوامله الأولية لمعرفة فيما إذا كان العدد مربعاً كاملاً لأن قوى العوامل الأولية في المربع الكامل يجب أن تكون زوجية.

**مثال (٣)** هل العدد 676 مربع كامل.

**الحل**

بتحليل العدد إلى قوى عوامله الأولية نجد أن

$$676 = 2^2 \times 13^2$$

وبما أن العددين الأوليين 2 و 13 يظهران بقوى زوجية فإن 676 مربع كامل. أي أن $676 = (2 \times 13)^2 = 26^2$. ◆

أيضاً يمكن استخدام تحليل الأعداد لإيجاد القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر.

**مثال (٤)** جد القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للأعــداد 36، 48، 60 .

**الحل**

بتحليل كل من الأعداد إلى قوى عوامله الأولية نرى أن

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$48 = 2^4 \times 3$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

وبهذا يكون $\gcd(36, 48, 60) = 2^2 \times 3 = 6$

$. lcm(36, 48, 60) = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$ ◆

**مثال (٥)** ما مجموع القواسم الأولية المختلفة للعدد 13068؟

**الحل**

بتحليل العدد إلى قوى عوامله الأولية نجد أن

$$13068 = 2^2 \times 3^3 \times 11^2$$

وبهذا فإن قواسمه الأولية هي 2 ، 3 ، 11 ومجموعها هو $2+3+11=16$ . ◆

**مثال (٦)** [*British JMC* 1999] ما محموع الأعداد الأولية التي لا تزيد عن 25؟

**الحل**

الأعداد الأولية التي لا تزيد عن 25 هي $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ ومجموعها

$. 2+3+5+7+11+13+17+19+23=100$ ◆

**مثال (٧)** العدد 701 عدد أولي . ما أول عدد أولي يلي هذا العدد؟

**الحل**

الأعداد 702، 703، 704 ، 705 ، 706 ، 707 ، 708 أعداد مؤلفة لأن 702 ، 704 ، 706 ، 708 أعداد زوجية والعدد 703 يقبل القسمة على 19 والعدد 705 يقبل القسمة على 5 والعدد 707 يقبل القسمة على 7. العدد 709 عدد أولي لأن $27 > \sqrt{709}$ والعدد 709 لا يقبل القسمة على أي من الأعداد الأولية $2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, 23$ . إذن، 709 هو أول عدد أولي يلي العدد 703. ◆

**مثال (٨)** يمكن استخدام المراتب 2 ، 5 ، 7 لتكوين ستة أعداد مختلفة يتكون كل منها من ثلاث مراتب (لا يسمح بتكرار المراتب) . كم عدد الأعداد الأولية من بين هذه الأعداد ؟

**الحل**

الأعداد الستة هي 275 ، 257 ، 527 ، 572 ، 725 ، 752 .

كل من 275 و 725 يقبل القسمة على 5 وكل من 572 و 752 زوجي. والعدد $527 = 17 \times 31$ . ولذا فهو عدد مؤلف. أما العدد 257 فهو أولي لأن $17 > \sqrt{257}$ والعدد 257 لا يقبل القسمة على أي من الأعداد الأولية $2, 3, 5, 7, 11, 13$ . إذن، العدد الأولي الوحيد هو 257 . ◆

**مثـــــال (٩)** [*BritishSMC* 2001] يــــنص حــــدس جولــــدباخ (*Goldbach's Conjecture*) والذي لم يتم إثباته أو نفيه، على أنه يمكن كتابة أي عدد زوجي أكبر من 2 كمجموع عددين أوليين. ولكن هــذا لــيس صــحيحاً للأعداد الفردية. أي من الأعداد الفردية التالية لا يمكن كتابته كمجموع عــددين أوليين: 13 ، 33 ، 43 ، 53 ، 73 ؟

**الحل**

$$13 = 2 + 11$$
$$33 = 2 + 31$$
$$43 = 2 + 41$$
$$73 = 2 + 71$$

ولكن لا يمكن كتابة 53 كمجموع عددين أوليين لأن أحدهما يجــب أن يكــون العدد الأولي الزوجي الوحيد 2 (لأن 53 فــردي) . وبهــذا يجــب أن يكــون $53 = 2 + 51$ . ولكن 51 ليس أولياً. ◆

**مثال (١٠)** [*Aust.MC* 1989] إذا كان $m$ و $n$ عددين صحيحين مــوجبين فجد أصغر قيمة للعدد $m$ بحيث يكون $2940m = n^2$ .

**الحل**

بما أن $2940 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2$ فإن أصغر عدد صحيح $m$ يجعل $2940m$ مربعاً كاملاً هو $3 \times 5 = 15$ . ◆

**مثال (١١)** جد قيمة العدد $P$ بحيث تكون جميع الأعداد $P$ ، $P+2$ ، $P+4$ أولية.

**الحل**

بقسمة العدد $P$ على 3 نجد أن $P=3k$ أو $P=3k+1$ أو $P=3k+2$ (لماذا؟ ) . إذا كان $P=3k$ و $P$ أولي فإن $P=3$ .

إذا كان $P=3k+1$ فإن $P+2=3k+1+2=3(k+1)$ وهذا مستحيل لأن $P+2$ أولي.

إذا كان $P=3k+2$ فإن $P+4=3k+2+4=3(k+2)$ وهذا أيضاً مستحيل لأن $P+4$ أولي. إذن، قيمة $P$ الوحيدة هي 3. ◆

**الأعداد الزوجية والفردية [*Even And Odd Numbers*]**

إذا استخدمنا خوارزمية القسمة، لقسمة العدد الصحيح $n$ على العدد 2 فيكون باقي القسمة هو 0 أو 1. أي أن $n=2k$ أو $n=2k+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

تسمى الأعداد الصحيحة التي على الصورة $2k$ أعداداً زوجية والأعداد الصحيحة التي على الصورة $2k+1$ أعداداً فردية. من ذلك نرى أن الأعداد الصحيحة تقسم إلى مجموعتين إحداهما مجموعة الأعداد الزوجية والأخرى مجموعة الأعداد الفردية.

مع أن مفهوم الأعداد الزوجية والأعداد الفردية هو مفهوم بسيط إلا أنه يلعب دوراً مهماً في مسائل نظرية الأعداد عموماً ومسائل المسابقات على وجه الخصوص، ولهذا يكون من المهم معرفة بعض خصائص هذه الأعداد.

نسرد بعض هذه الخصائص هنا والتي من السهل التحقق من صوابها.

(١) مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي.

(٢)مجموع عددين زوجيين هو عدد زوجي.

(٣)مجموع عدد زوجي مع عدد فردي هو عدد فردي.

(٤)حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد فردي.

(٥) يكون حاصل ضرب عددين زوجياً إذا وفقط إذا كان أحدهما على الأقل زوجياً.

**مثال (١٢)** إذا كانت $1, 2, 3, \ldots, n$ أعداداً صحيحة فأثبت أن

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

**الحل**

لنفرض أن $S=1+2+3+\ldots+(n-1)+n$ (١)

بكتابة $S$ على الصورة

$$S=n+(n-1)+\ldots+2+1 \qquad (٢)$$

وجمع (١) و (٢) نجد أن

$$2S=(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\ldots+(n-1+2)+(n+1)$$
$$2S=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)$$
$$2S=n(n+1)$$

إذن، $S=\frac{n(n+1)}{2}$. ◆

**مثال (١٣)** جد مجموع أول $n$ من الأعداد الصحيحة الزوجية.

**الحل**

لاحظ أن المطلوب هو إيجاد $2+4+6+...+2n$

الآن ، $2+4+6+...+2n = 2(1+2+3+ ... +n)$

$$= 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= n(n+1)$$ ◆

**مثال (١٤)** أثبت أن $1+3+5+ ... +(2n-1) = n^2$ حيث $n \geq 1$ عدد صحيح.

**الحل**

لاحظ أولاً أن

$$1+2+3+4+...+(2n-1)+2n$$
$$=[1+3+ ... +(2n-1)]+[2+4+6+ ... +2n]$$
$$=[1+3+ ... +(2n-1)]+2[1+2+3+ ... +n]$$

إذن،

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = [1+3+...+(2n-1)] + 2\frac{n(n+1)}{2}$$

من ذلك نرى أن

$$.1+3+ ... +(2n-1) = 2n^2+n-n^2-n = n^2$$ ◆

**مثال (١٥)** إذا كان مجموع خمسة أعداد فردية متتالية يساوي 105 فما أكبر هذه الأعداد ؟

**الحل**

نفرض أن الأعداد الخمسة الفردية المتتالية هي $2k+1, 2k+3, 2k+5, 2k+7, 2k+9$. الآن

$$(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)+(2k+7)+(2k+9)=105$$
$$10k+25=105$$
$$10k=80$$
$$k=8$$

إذن، أكبر الأعداد هو $2k+9=16+9=25$ . ◆

**مثال (١٦)** لكل عدد صحيح $n \geq 1$ أثبت أن $2^n$ هو حاصل جمع عددين فرديين متتاليين.

**الحل**

لاحظ أن

$$2^n = 2\times 2^{n-1} = 2^{n-1}+2^{n-1} = (2^{n-1}-1)+(2^{n-1}+1)$$

وكل من $2^{n-1}-1$ و $2^{n-1}+1$ هو عدد فردي. ◆

**مثال (١٧)** إذا كان العدد الأكبر من بين عددين فرديين متتاليين يساوي ثلاثة أمثال العدد الأصغر فما مجموع العددين؟

**الحل**

نفرض أن العددين هما $2k+1$ و $2k+3$ . عندئذ ،

$$2k+3=3(2k+1)$$
$$2k+3=6k+3$$

$$4k = 0$$
$$k = 0$$

ويكون العددان هما 1 و 3 . مجموعهما يساوي 4 . ◆

**القواسم الموجبة [*Positive Divisors*]**

لإيجاد جميع القواسم الموجبة للعدد 12 نقوم بتحليل العدد إلى عوامله الأولية فنجد $12 = 2^2 \times 3$

الآن، قواسم العدد 12 يجب أن تكون على الصورة

$2^a \times 3^b$ حيث $a = 0, 1, 2$ ، $b = 0, 1$.

ومن ذلك نرى أن هذه القواسم هي

$2^0 \times 3^0 = 1$ ، $2^0 \times 3^1 = 3$ ، $2^1 \times 3^0 = 2$ ، $2^1 \times 3^1 = 6$ ، $2^2 \times 3^0 = 4$ ، $2^2 \times 3^1 = 12$ . عدد هذه القواسم يساوي 6 .

وبصورة عامة إذا أردنا إيجاد عدد القواسم الموجبة للعدد

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$$

حيث $p_i$ أعداد أولية مختلفة و $k_i$ أعداد صحيحة موجبة فنجد أن هذا العدد هو

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_t + 1)$$

**مثال (١٨)** جد عدد القواسم الموجبة للعدد 420.

**الحل**

بتحليل العدد إلى قوى عوامله الأولية نجد أن

$$420 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$$

ولذا فإن عدد قواسمه الموجبة هي

$$(2+1)\,(1+1)\,(1+1)\,(1+1) = 24\ .$$ ◆

**مثال (١٩)** ما أصغر عدد صحيح موجب عدد قواسمه الموجبة يساوي 8 ؟

**الحل**

بما أن $8 = 1 \times 8 = 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2$ فإن العدد الصحيح الموجب الذي عدد قواسمه 8 يجب أن يكون على إحدى الصور:

$$p^7 \text{ أو } p^3 q \text{ أو } pqr$$

حيث $p$ ، $q$ ، $r$ أعداد أولية مختلفة. أصغر هذه الأعداد هو $24 = 3 \times 2^3$ . ◆

**مثال (٢٠)** ما عدد القواسم الموجبة الفردية للعدد 420.

**الحل**

بتحليل العديد 420 نجد أن $420 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ .

وبملاحظة أن أي قاسم فردي لا يمكن أن يحتوي العدد 2 في تحليله نرى أن عدد القواسم الفردية هو $8 = (1+1)(1+1)(1+1)$ . ◆

**مثال (٢١)** جد عدد القواسم الزوجية الموجبة للعدد 420 .

**الحل**

أفضل طريقة لحل هذا المثال هو إيجاد عدد القواسم الموجبة وعدد القواسم الفردية وطرحهما لنحصل على عدد القواسم الزوجية . وجدنا في المثال (١٩) أن

عدد القواسم هو 24 ووجدنا في المثال (٢٠) أن عدد القواسم الفردية هـو 8 .

إذن، عدد القواسم الزوجية هو $24-8=16$ . ◆

**مجموع القواسم [*Sum of Divisors*]**

من الممكن إيجاد مجموع قواسم العدد 12 الموجبة بكتابة هذه القواسم ثم جمعها على النحو التالي:

$$1+2+3+4+6+12=28$$

والطريقة الأفضل لإنجاز ذلك هو استخدام تحليل العدد إلى قوى عوامله الأولية.

$$12=2^2\times 3$$

عندئذ، مجموع قواسم 12 الموجبة هي

$$(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1)=(1+2+4)(1+3)$$
$$=7\times 4=28$$

وبصورة عامة إذا كان

$$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_t^{k_t}$$

هو تحليل $n$ إلى قوى عوامله الأولية المختلفة فإن مجموع قواسمه هو

$(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{k_1})(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{k_2})\ldots(1+p_t+p_t^2+\ldots+p_t^{k_t})$ .

**مثال (٢٢)**

جد مجموع قواسم العدد 252 الموجبة .

**الحل**

بتحليل العدد نجد أن $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ . وبهذا فإن مجموع قواسم 252 الموجبة هو

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2)(1+7) = 7\times 13\times 8 = 728$$ ◆

**مثال (٢٣)** جد عدد ومجموع قواسم العدد $6!$ .

**الحل**

$$\begin{aligned} 6! &= 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 \\ &= 2^4 \times 3^2 \times 5 \end{aligned}$$

إذن، عدد القواسم هو $(4+1)(2+1)(1+1) = 5\times 3\times 2 = 30$

ومجموعها هو

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)(1+5) = 31\times 13\times 6 = 2418 .$$ ◆

## مسائل محلولة

(١) ما عدد القواسم الموجبة الزوجية للعدد 880 ؟

(أ) 4 (ب) 8 (ج) 12 (د) 16

(٢) [$MA\Theta$ 2007] ما هو أصغر قاسم أولي للمجموع $3^{2007}+35^{1000}$؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 7

(٣) إذا كان $n$ مضاعفاً للعدد 5 وعدد قواسمه الموجبة يساوي 11 فما عدد القواسم الموجبة للعدد $4n$ ؟

(أ) 11 (ب) 22 (ج) 33 (د) 44

(٤) ما أكبر قاسم أولي للعدد $25!+27!$ ؟

(أ) 17 (ب) 19 (ج) 31 (د) 37

(٥) [$MAC10A$ 2005] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ التي تجعل $6n$ يقبل القسمة على العدد $1+2+...+n$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٦) ما أكبر عدد صحيح $n$ بحيث يقبل العدد $12!$ القسمة على العدد $n^3$؟

(أ) $2^3\times 3$ (ب) $2^3\times 3^2$ (ج) $2^4\times 3$ (د) $2^4\times 3^2$

(٧) ما أصغر عدد صحيح موجب $n$ بحيث يقبل العدد $n!$ القسمة على العدد $5^8$؟

(أ) 31 (ب) 35 (ج) 37 (د) 40

(٨) [$MAC10A$ 2005] ما عدد المكعبات الموجبة التي تقسم العدد $3!\times 5!\times 7!$ ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

(٩) [$MA\Theta$ 2005] إذا كان $a^2+b^2=c^2$ حيث $a$ ، $b$ ، $c$ أعداد صحيحة موجبة فأي من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون عدد القواسم الموجبة للعدد $(c+b)(c-b)$ ؟

(أ) 17 (ب) 21 (ج) 29 (د) 36

(١٠) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ الأقل من 50 والتي عدد قواسمها الموجبة يساوي 4 ؟

(أ) 7 (ب) 9 (ج) 13 (د) 15

(١١) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ الأصغر من 80 وعدد قواسمها الموجبة يساوي 9 ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 9

(١٢) نقول إن العددين $p$ و $p+2$ توأمين أوليين إذا كان كل منهما عدداً أولياً. ما حاصل ضرب جميع التوائم الأولية بين 19 و 40 ؟

(أ) 437 (ب) 621 (ج) 713 (د) 899

(١٣) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ التي تجعل العدد 27 يقبل القسمة على $2n+1$ ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

(١٤) [$AMC10B$ 2002] جميع الأعداد الصحيحة الموجبة $A$، $B$، $A-B$ ، $A+B$ هي أعداد أولية . مجموع هذه الأعداد الأربعة هو :

(أ) عدد زوجي (ب) عدد يقبل القسمة على 3

(ج) عدد يقبل القسمة على 7    (د) عدد أولي

(١٥) [Aust.MC 1997] لاحظ أن بواقي قسمة العدد 119 على الأعداد 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 هي على التوالي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 . ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث مراتب وتتمتع بهذه الخاصية ؟

(أ) 1    (ب) 3    (ج) 7    (د) 14

(١٦) [AMC10B 2002] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ التي تجعل العدد $n^2-3n+2$ أولياً؟

(أ) 1    (ب) 2    (ج) 3    (د) 30

(١٧) [AMC10A 2003] لنفرض أن $n$ هو أكبر عدد صحيح يكتب كحاصل ضرب ثلاث أعداد أولية مختلفة $d$ ، $e$ ، $10d+e$ حيث $e$ و $d$ مرتبتان عشريتان . ما مجموع مراتب $n$؟

(أ) 15    (ب) 17    (ج) 18    (د) 21

(١٨) ما عدد القيم الصحيحة الموجبة $n$ التي أكبر من 4 بحيث يكون $9+2^{n-4}$ مربعاً كاملاً ؟

(أ) 1    (ب) 2    (ج) 3    (د) 4

(١٩) ما عدد الأعداد الأولية $p$ التي تجعل العدد $17p+1$ مربعاً كاملاً ؟

(أ) 0    (ب) 1    (ج) 2    (د) 3

(٢٠) ما العدد الأولي $p$ من بين الأعداد الأولية التالية التي تجعل عدد القواسم الموجبة للعدد $p^2+11$ يساوي 6؟

(أ) 2    (ب) 3    (ج) 5    (د) 7

(٢١) [$AMC10A$ 2000] اخترنا عددان أوليان مختلفان $p$ و $q$ بين 4 و 18 . ما القيمة الممكنة للمقدار $pq-(p+q)$ من القيم التالية ؟

(أ) 21 (ب) 60 (ج) 119 (د) 231

(٢٢) إذا كان عدد القواسم الموجبة للعدد $n$ هو 9 فما مجموع جميع القيم الممكنة لعدد القواسم الموجبة للعدد $n^2$؟

(أ) 17 (ب) 25 (ج) 42 (د) 48

(٢٣) [$MA\Theta$ 2009] العدد 32639 حاصل ضرب عددين أوليين أحدهما يساوي تقريباً ضعف الآخر . ما مجموعهما؟

(أ) 356 (ب) 378 (ج) 381 (د) 384

(٢٤) [$Aust.MC$ 2000] إذا كان باقي قسمة 2000 على العدد $N$ يساوي 5 فما عدد القيم المختلفة الممكنة للعدد $N$؟

(أ) 6 (ب) 8 (ج) 13 (د) 16

(٢٥) [$MA\Theta$ 2011] إذا كان $a_n$ هو عدد القواسم الموجبة للعدد $n$ فما قيمة $a_1+a_2+...+a_{10}$ ؟

(أ) 23 (ب) 25 (ج) 27 (د) 29

(٢٦) إذا كان $m$ و $n$ عددين صحيحين موجبين يحققان $mn=40$ و $2m+3n=31$ فما قيمة المجموع $m+n$ ؟

(أ) 5 (ب) 8 (ج) 12 (د) 13

(٢٧) ما أكبر عدد صحيح $k$ بحيث يقبل العدد $12!$ القسمة على $3^k$؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٢٨) [Aust.MC 1994] عدد القواسم الموجبة للعدد $N$ يســـاوي 6. حاصـــل ضرب خمسة من هذه القواسم يساوي 648 . أي من الأعداد التالية هـــو القاسم السادس للعدد $N$؟

(أ) 4 (ب) 9 (ج) 12 (د) 16

(٢٩) [British SMC 2002] إذا كان $2002 = x \times y \times z \times w$ حيث كل من $x$ ، $y$ ، $z$ ، $w$ عدد أولي فما قيمة $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$؟

(أ) 66 (ب) 203 (ج) 285 (د) 343

(٣٠) [British SMC 1999] يوجد عدد أولي واحد فقط من بين الأعداد التالية. ما هو؟

(أ) $1000^2 + 111^2$ (ب) $5555^2 + 6666^2$

(ج) $2000^2 - 999^2$ (د) $1001^2 + 1002^2$

(٣١) [Aust.MC 1975] عدد الأزواج المرتبة $(p,q)$ حيـــث $p$ و $q$ عـــددان أوليان مختلفان يحققان $p \mid (q^2 - q)$ و $q \mid (p^2 + p)$ هو

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٣٢) [Aust.MC 1984] ما أصغر عدد صحيح موجب بحيث يكـــون حاصـــل ضربه بالعدد 504 مربعاً كاملاً ؟

(أ) 2 (ب) 6 (ج) 7 (د) 14

(٣٣) [Aust.MC 1981] بكم طريقة يمكن كتابة العدد 24 كمجموع عـــددين أوليين ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٣٤) [*British IMC* 2006] ما العدد المؤلف من بين الأعداد التالية ؟

(أ) $2^2-1$ (ب) $2^3-1$ (ج) $2^5-1$ (د) $2^6-1$

(٣٥) [*British IMC* 1999] لأي من الخيارات التالية يكون حاصل الضرب $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\ldots(1+\frac{1}{n})$ عدداً صحيحاً ؟

(أ) $n$ فردي (ب) $n$ زوجي

(ج) $n$ يقبل القسمة على 3 (د) دائماً.

(٣٦) [*British JMC* 1998] مجموع القواسم الأولية المختلفة للعدد 1998 هو

(أ) 42 (ب) 43 (ج) 116 (د) 1001

(٣٧) [*AHSME* 1998] لنفرض أننا كتبنا العدد 1998 كحاصل ضرب عددين صحيحين موجبين بحيث يكون الفرق بينهما أصغر ما يمكن. ما الفرق؟

(أ) 8 (ب) 15 (ج) 17 (د) 47

(٣٨) [*AHSME* 1990] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 50 ولكل منها عدد فردي من القواسم الموجبة ؟

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 7 (د) 9

(٣٩) [*British IMC* 2000] ما عدد الأصفار في بداية العدد $3^4\times4^5\times5^6$ ؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 8

## حلول المسائل

(١) ما عدد القواسم الموجبة الزوجية للعدد 880 ؟

(أ) 4 (ب) 8 (ج) 12 (د) 16

**الحل**

الإجابة هي (د) : بتحليل العدد 880 إلى قوى عوامله الأولية نجد أن

$$880 = 2^4 \times 5 \times 11$$

الآن، عدد القواسم الموجبة هو

$$(4+1)(1+1)(1+1) = 5 \times 2 \times 2 = 20$$

لاحظ أن القواسم الفردية لا تحتوي على قوى العدد 2 . ولذا فعددها هو

$(1+1)\,(1+1) = 2 \times 2 = 4$ .

إذن ، عدد القواسم الزوجية للعدد 880 هو $20 - 4 = 16$ .

(٢) [$MA\Theta$ 2007] ما أصغر قاسم أولي للمجموع $35^{1000} + 3^{2007}$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 7

**الحل**

الإجابة هي (أ) : لاحظ أن $3^{2007}$ عدداً فردياً لأنه حاصل ضرب أعداد فردية. أيضاً، العدد $35^{1000}$ عدد فردي. ولذا فالمجموع $35^{1000} + 3^{2007}$ هو عدد زوجي. ومن ثم فالعدد الأولي 2 يقسم العدد وهو أصغر الأعداد الأولية.

(٣) إذا كان $n$ مضاعفاً للعدد 5 وعدد قواسمه الموجبة يساوي 11 فما عدد القواسم الموجبة للعدد $4n$ ؟

(أ) 11 (ب) 22 (ج) 33 (د) 44

**الحل**

الإجابة هي (ج) : بما أن العدد $n$ مضاعف للعدد 5 وعدد قواسمه الموجبة يساوي 11 فإن $n = 5^{10}$ . عندئذن $4n = 2^2 \times 5^{10}$ . وبهذا فعدد قواسم $4n$ هو $(2+1)(10+1) = 3 \times 11 = 33$ .

(٤) ما أكبر قاسم أولي للعدد $25!+27!$ ؟

(أ) 17 (ب) 19 (ج) 31 (د) 37

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أن $25!+27! = 25!\,(1+26\times 27)$

$= 25! \times 703$

$= 25! \times 19 \times 37$

ومن ذلك نجد أن أكبر القواسم الأولية هو 37 .

(٥) [$MAC10A$ 2005] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ التي تجعل $6n$ يقبل القسمة على العدد $1+2+\ldots+n$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أولاً أن

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ولذا فإن $\frac{12}{n+1}=\frac{6n}{\frac{n(n+1)}{2}}$ عدد صحيح. وبهذا فإن 12 يقبل القسمة على $n+1$. إذن، القيم الممكنة للعدد $n+1$ هي $1, 2, 3, 4, 6, 12$. وتكون القيم الممكنة للعدد $n$ هي $0, 1, 2, 3, 5, 11$. ولكن 0 غير موجب. إذن، عدد القيم يساوي 5 .

| (٦) ما أكبر عدد صحيح $n$ بحيث يقبل العدد $12!$ القسمة على العدد $n^3$؟ |
|---|
| (أ) $2^3\times 3$ (ب) $2^3\times 3^2$ (ج) $2^4\times 3$ (د) $2^4\times 3^2$ |

**الحل**

الإجابة هي (أ) : لاحظ أن

$$12!=12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2$$

$$=2^{10}\times 3^5\times 5^2\times 7\times 11$$

الآن، $(2^3\times 3)^3=2^9\times 3^3$ يقسم العدد $12!$. ومن ذلك نرى أن $n=2^3\times 3$ هو العدد المنشود.

| (٧) ما أصغر عدد صحيح موجب $n$ بحيث يقبل العدد $n!$ القسمة على العدد $5^8$؟ |
|---|
| (أ) 31 (ب) 35 (ج) 37 (د) 40 |

**الحل**

الإجابة هي (ب) : أفضل طريقة لحل هذه المسألة هو كتابة مضاعفات العدد 5 لإستنتاج العدد $n$. هذه المضاعفات هي

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$$

كل من هذه الأعداد يساهم بقوة واحدة للعدد 5 ما عدا 25 فهو يساهم بقوتين. ولذا نجد أن $35!$ يقبل القسمة على $5^8$ وأن $n = 35$ هو أصغر هذه الأعداد.

(٨) [$MAC10A$ 2005] ما عدد المكعبات الموجبة التي تقسم العدد $3!\times 5!\times 7!$ ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أن تحليل العدد

$$3!\times 5!\times 7! = 2^8\times 3^4\times 5^2\times 7^1$$

المكعبات التي تقسم العدد $3!\times 5!\times 7!$ يجب أن تكون على الصورة

$$2^a\times 3^b\times 5^c\times 7^d$$

حيث كل من $a$ ، $b$ ، $c$ ، $d$ مضاعف للعدد 3 وحيث $a\le 8$ ، $b\le 4$ ، $c\le 2$ ، $d\le 1$ . من ذلك نرى أن $a\in\{0, 3, 6\}$ ، $b\in\{0, 3\}$ ، $c\in\{0\}$ ، $d\in\{0\}$. وبهذا فعدد المكعبات القواسم للعدد $3!\times 5!\times 7!$ هو

$$3\times 2\times 1\times 1 = 6 .$$

(٩) [$MA\Theta$ 2005] إذا كان $a^2+b^2=c^2$ حيث $a$ ، $b$ ، $c$ أعـــداد صـــحيحة موجبة فأي من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون عدد القواسم الموجبة للعدد $(c+b)(c-b)$ ؟

(أ) 17 (ب) 21 (ج) 29 (د) 36

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

$$(c+b)(c-b)=c^2-b^2=a^2$$

مربع كامل. ولذا فعدد قواسمه يجب أن يكون فردياً. العدد الزوجي الوحيد بين الأعداد هو 36 وتكون الإجابة هي (د).

(١٠) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ الأقل من 50 والتي عـــدد قواسمهـــا الموجبة يساوي 4 ؟

(أ) 7 (ب) 9 (ج) 13 (د) 15

**الحل**

الإجابة هي (د) : لنفرض أن تحليل للعدد $n$ هو $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}$ حيث $p_i$ أعداد أولية مختلفة. وبما أن $4=1\times4=2\times2$ فنرى أن $n=p_1^3$ أو أن $n=p_1p_2$. القيم المختلفة للعدد $n$ الأصغر من 50 هي

$$2^3=8,\ 3^3=27,\ 2\times3=6$$
$$2\times5=10,\ 2\times7=14,\ 2\times11=22$$
$$2\times13=26,\ 2\times17=34,\ 2\times19=38$$

$2\times 23=46,\ 3\times 5=15,$
$3\times 7=21,\ 3\times 11=33,\ 3\times 13=39$
$5\times 7=35$

عدد هذه الأعداد يساوي 15.

(١١) ما هو عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ الأصغر من 80 وعدد قواسمها الموجبة يساوي 9 ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 9

**الحل**

الإجابة هي (أ) : بما أن $9=3\times 3=1\times 9$ فالعدد $n$ الذي عدد قواسمه 9 يجب أن يكون على الصورة $n=p^8$ أو $n=p^2q^2$ حيث $p$ و $q$ عددان أوليان.

وبما أن $2^8>80$ فلا توجد أعداد من هذا النوع . والعدد الوحيد الأصغر من 80 الذي على الصورة $p^2q^2$ هو $n=2^2\times 3^2=36$ . إذن، الإجابة هي (أ).

(١٢) نقول إن العددين $p$ و $p+2$ توأمان أوليان إذا كان كل منهما عدداً أولياً. ما هو حاصل ضرب جميع التوائم الأولية بين 19 و 40 ؟

(أ) 437 (ب) 621 (ج) 713 (د) 899

**الحل**

الإجابة هي (د) : الأعداد الأولية بين 19 و 40 هي 19 ، 23 ، 29، 31 ، 37 والتوأمان الوحيدان هما 29 و 31 وحاصل ضربهما هو $29\times 31=899$.

(١٣) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ التي تجعل العدد 27 يقبل القسمة على $2n+1$ ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

**الحل**

الإجابة هي (أ) : لاحظ أن $2n+1$ عدد فردي. ولذا فالقيم المختلفة التي تجعل $\frac{27}{2n+1}$ عدداً صحيحاً هي القيم الفردية $2n+1 \in \{1, 3, 9, 27\}$ .

أي أن $n \in \{0, 1, 4, 13\}$ . ولكن $n = 0$ غير موجب. إذن، $n \in \{1, 4, 13\}$ .

(١٤) [$AMC10B$ 2002] جميع الأعداد الصحيحة الموجبة $A$ ، $B$ ، $A-B$ ، $A+B$ هي أعداد أولية . مجموع هذه الأعداد الأربعة هو :

(أ) عدد زوجي (ب) عدد يقبل القسمة على 3

(ج) عدد يقبل القسمة على 7 (د) عدد أولي

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أولاً أن العددين $A-B$ و $A+B$ إما أنهما زوجيان معاً أو فرديان معاً وبما أنهما أوليان وأن العدد الأولي الزوجي الوحيد هو 2 فإنهما يجب أن يكونا فرديين. إذن، $A$ فردي و $B$ زوجي (أو $A$ زوجي و $B$ فردي). الآن $A+B > A > A-B > 2$ . وبما أن $A$ أولي فهو فردي. إذن، $B$ زوجي.

وبهذا يكون $B = 2$ (العدد الأولي الزوجي الوحيد) . الآن، $A-2$ ، $A$ ، $A+2$ ثلاثة أعداد أولية متتالية. إذن، $A-2=3$ ، $A=5$، $A+2=7$ .

وبهذا مجموع الأعداد الأربعة هو $2+3+5+7=17$ .

وهذا عدد أولي.

(١٥) [Aust.MC 1997] لاحظ أن بواقي قسمة العدد 119 على الأعداد 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 هي على التوالي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 . ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث مراتب وتتمتع بهذه الخاصية ؟

(أ) 1 (ب) 3 (ج) 7 (د) 14

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أن أي عدد يتمتع بهذه الخاصية هو عدد يزيد عن 119 بمضاعفات المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6

ولكن $lcm(2,3,4,5,)=2^2\times 3\times 5=60$ .

إذن، الأعداد ذات الثلاث مراتب هي $119, 179, 239, \ldots 959$ وعددها يساوي 14 .

(١٦) [AMC10B 2002] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ التي تجعل العدد $n^2-3n+2$ أولياً ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 30

**الحل**

الإجابة هي (أ) : بما أن

$$n^2 - 3n + 2 = (n-2)(n-1)$$

عدد أولي فإن أحد العددين $n-2$ أو $n-1$ أولي والآخر يساوي $1$. إذا كان $n-1=1$ فإن $n-2=0$ ونجد أن $(n-2)(n-1) = 0 \times 1 = 0$ وهذا ليس عدداً أولياً . أما إذا كان $n-2=1$ فإن $n-1=2$ ونحصل على العدد الأولي $(n-2)(n-1) = 1 \times 2 = 2$ .

إذن، القيمة الوحيدة للعدد $n$ هي 3 وتكون الإجابة هي (أ).

(١٧) $[AMC10A\ \ 2003]$ لنفرض أن $n$ هو أكبر عدد صحيح يكتب كحاصل ضرب ثلاث أعداد أولية مختلفة $d$ ، $e$ ، $10d+e$ حيث $e$ و $d$ مرتبتان عشريتان . ما مجموع مراتب $n$؟

(أ) 15 (ب) 17 (ج) 18 (د) 21

**الحل**

الإجابة هي (ب) : بما أن $e$ هو مرتبة أحاد العدد $10d+e$ وأن $e$ عدد أولي فإن $e \in \{3, 7\}$. أيضاً $d$ مرتبة العشرات وهو أولي أيضاً. ولذا فإن $d \in \{2, 3, 5, 7\}$. من ذلك نجد أن

$$10d + e \in \{23, 27, 33, 37, 53, 57, 73, 77\}$$

ولكن $10d+e$ عدداً أولياً. إذن، $10d + e \in \{23, 37, 53, 73\}$

الآن، أكبر قيمة للعدد $n$ يمكن تكوينه باستخدام ثلاث أعداد أولية مختلفة من هذه الأعداد هو $n = 7\times5\times73 = 2555$ .

مجموع المراتب هو $2+5+5+5=17$ .

(١٨) ما عدد القيم الصحيحة الموجبة $n$ التي أكبر من 4 بحيث يكون $9+2^{n-4}$ مربعاً كاملاً ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

**الحل**

الإجابة هي (أ) : لنفرض أن $9+2^{n-4}=m^2$ حيث $m$ عدد صحيح.

عندئذ، $2^{n-4}=m^2-9=(m-3)(m+3)$ .

وبهذا فإن كل من $m-3$ و $m+3$ يجب أن يكون قوة للعدد 2 وهذا يتحقق فقط عندما يكون $m=5$ .

من ذلك نجد أن $2^{n-4}=16=2^4$ . ومنه فإن $n-4=4$ . أي أن $n=8$ .

(١٩) ما عدد الأعداد الأولية $p$ التي تجعل العدد $17p+1$ مربعاً كاملاً ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

**الحل**

الإجابة هي (ب) : لنفرض أن $17p+1=m^2$ حيث $m$ عدد صحيح.

عندئذ، $17p=m^2-1=(m-1)(m+1)$. من ذلك نجد أن

( $m+1=p$ و $m-1=17$ ) أو أن ( $m-1=p$ و $m+1=17$ ).

إذا كـــان $m+1=p$ و $m-1=17$ فنجـــد أن $p=19$ . وإذا كـــان $m-1=p$ و $m+1=17$ فنجد أن $p=15$ وهذا عدد غـــير أولي. إذن القيمة الوحيدة هي $p=19$ .

| (٢٠) ما العدد الأولي $p$ من بين الأعداد الأولية التالية التي تجعل عدد القواســـم الموجبة للعدد $p^2+11$ يساوي 6 ؟ |
|---|
| (أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 7 |

**الحل**

الاجابة هي (ب) : بتجريب هذه الأعداد نجد أن

$2^2+11=15=3\times 5$ وعدد قواسمه يساوي 4 .

$3^2+11=20=2^2\times 5$ وعدد قواسمه يساوي 6 . $5^2+11=36=2^2\times 3^2$ وعدد قواسمه يساوي 9 . $7^2+11=60=2^2\times 3\times 5$ وعدد قواسمه يساوي 12 . إذن، الإجابة هي (ب).

| (٢١) [$AMC10A$ 2000] اخترنا عددين أوليين مختلفين $p$ و $q$ بين 4 و 18 . ما القيمة الممكنة للمقدار $pq-(p+q)$ من القيم التالية ؟ |
|---|
| (أ) 21 (ب) 60 (ج) 119 (د) 231 |

**الحل**

الإجابة هي (ج) : لنفرض أن $k=pq-(p+q)$ عندئذ،

$$k+1=pq-p-q+1=(p-1)(q-1)$$

وبما أن $p$ و $q$ فرديان فإن كل من $p-1$ و $q-1$ زوجي. وبهذا فإن $k+1=(p-1)(q-1)$ عدد زوجي. القيم الممكنة لكل من $p-1$ و $q-1$ هي $4, 6, 10, 12, 16$ وبهذا نرى أن القيم الممكنة للعدد $k+1$ هي:

$$24, 40, 48, 60, 64, 72, 96, 120, 160, 192$$

ومن ثم فقيم $k$ هي:

$$23, 39, 47, 59, 63, 71, 95, 119, 159, 191$$

والعدد المطلوب هو $119$ .

**حل آخر**: بما أن $p$ و $q$ فرديان فإن $pq$ فردي و $p+q$ زوجي. من ذلك يكون $pq-(p+q)$ عدداً فردياً. وبهذا يكون الخيار (ب) غير ممكن. أعلى قيمتين للعددين $p$ و $q$ هما $13$ و $17$ . وبما أن $13\times17-(13+17)=191$ فالخيار (د) غير ممكن.

أصغر قيمتين للعددين $p$ و $q$ هما $5$ و $7$ . وبما أن $5\times7-(5+7)=23$ فالخيار (أ) غير ممكن . إذن، الخيار الوحيد الممكن هو الخيار (ج).

(٢٢) إذا كان عدد القواسم الموجبة للعدد $n$ هو $9$ فما مجموع جميع القيم الممكنة لعدد القواسم الموجبة للعدد $n^2$؟

(أ) $17$    (ب) $25$    (ج) $42$    (د) $48$

**الحل**

الإجابة هي (ج): لاحظ أن العدد $n$ يجب أن يكون على الصورة $p^8$ أو $p^2q^2$ حيث $p$ و $q$ عددان أوليان. إذن ،

$n^2 = p^{16}$ أو $n^2 = p^4q^4$ . ومن ثم يكون عدد قواسم $n^2$ هو 17 أو 25 .
مجموعهما هو $25+17=42$ .

| (٢٣) [2009 $MA\Theta$] العدد 32639 حاصل ضرب عددين أوليين أحدهما يساوي تقريباً ضعف الآخر . ما مجموعهما؟ |
|---|
| (أ) 356 (ب) 378 (ج) 381 (د) 384 |

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحـــظ أن $\frac{32639}{2} \approx 16320$ وأن $128 \approx \sqrt{16320}$ .
أقرب عـــدد أولي للعـــدد 128 هـــو 127 . الآن، العـــدد الثـــاني هـــو
$257 = \frac{32639}{127}$ ويكون $127+257=384$ .

| (٢٤) [2000 *Aust.MC*] إذا كان باقي قسمة 2000 على العدد $N$ يســـاوي 5 فما عدد القيم المختلفة الممكنة للعدد $N$؟ |
|---|
| (أ) 6 (ب) 8 (ج) 13 (د) 16 |

**الحل**

الإجابة هي (ج) : بما أن باقي قسمة 2000 على العدد $N$ يساوي 5 فإن $N$ يقسم $2000-5=1995=3\times5\times7\times19$ وأن $N>5$ . الآن عـــدد قواسم 1995 هو 16 ولكن القواسم 1 ، 3 ، 5 غير ممكنة لأن $N>5$ .
وبهذا يكون عدد قيم $N$ المختلفة هو 13.

(٢٥) [$MA\Theta$ 2011] إذا كان $a_n$ هو عدد القواسم الموجبة للعدد $n$ فما قيمة $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ ؟

أ) 23 ب) 25 ج) 27 د) 29

**الحل**

الإجابة هي (ج): المجموع

$a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 1+2+2+3+2+4+2+4+3+4 = 27$.

(٢٦) إذا كان $m$ و $n$ عددين صحيحين موجبين يحققان $mn = 40$ و $2m + 3n = 31$ فما قيمة المجموع $m + n$ ؟

أ) 5 ب) 8 ج) 12 د) 13

**الحل**

الإجابة هي (د) : بما أن $mn = 40$ فإن $n = \frac{40}{m}$ . وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن

$$2m + 3\left(\frac{40}{m}\right) = 31$$

$$2m^2 - 31m + 120 = 0$$

$$(2m - 15)(m - 8) = 0$$

إذن، $m = 8$ أو $m = \frac{15}{2}$ . وبما أن $m$ عدد صحيح فإن $m = 8$ . ويكون $n = 5$ . المجموع $m + n = 8 + 5 = 13$ .

(٢٧) ما أكبر عدد صحيح $k$ بحيث يقبل العدد $12!$ القسمة على $3^k$؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

**الحل**

الإجابة هي (د) : بتحليل $12!$ إلى عوامله الأولية نجد أن

$$12! = 12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2$$

$$= 2^{10}\times3^5\times5^2\times7\times11$$

ولذا فإن $k=5$ .

**حل آخر**: في مفكوك $12!$ يوجد 3 مضاعفات للعدد 3 كل منها يساهم بقوة واحدة، إضافة إلى العدد 9 الذي يساهم بقوتين للعدد 3 . إذن، أكبر قوة للعدد 3 هي $3+2=5$ .

(٢٨) [$Aust.MC$ 1994] عدد القواسم الموجبة للعدد $N$ يساوي 6 . حاصل ضرب خمسة من هذه القواسم يساوي 648 . أي من الأعداد التالية هو القاسم السادس للعدد $N$؟

(أ) 4 (ب) 9 (ج) 12 (د) 16

**الحل**

الإجابة هي (ب) : بما أن $6=1\times6=2\times3$ فإن $N=p^5$ أو أن $N=pq^2$ حيث $p$ و $q$ عددان أوليان.

إذا كان $N=p^5$ فقواسمه هي $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5$ وحاصل ضرب خمسةمنها يجب أن يكون على الصورة $p^k$ .

ولكن $648 = 2^3 \times 3^4$ ليس على الصورة $p^k$ . إذن، $N = pq^2$ وقواسمه هي $1, p, q, q^2, pq, pq^2$ وحاصل ضرب هذه القواسم هو $p^3q^6$ .
ولكن حاصل ضرب خمسة منها هو $2^3 \times 3^4$ . إذن، $p = 2$ و $q = 3$ والقاسم السادس هو $3^2 = 9$ .

| (٢٩) [British SMC 2002] إذا كان $2002 = x \times y \times z \times w$ حيث كل من $x$ ، $y$ ، $z$ ، $w$ عدد أولي فما قيمة $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$؟ |
|---|
| (أ) 66 (ب) 203 (ج) 285 (د) 343 |

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أن $2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$ . عندئذ،

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 = 343$$

| (٣٠) [British SMC 1999] يوجد عدد أولي واحد فقط من بين الأعداد التالية. ما هو؟ |
|---|
| (أ) $1000^2 + 111^2$ (ب) $5555^2 + 6666^2$ |
| (ج) $2000^2 - 999^2$ (د) $1001^2 + 1002^2$ |

**الحل**

الإجابة هي (أ): العدد (ب) هو $30858025 + 44435556 = 75293581$
وبما أن $(1+5+9+5) - (8+3+2+7) = 0$ والعدد 0 يقبل القسمة على 11 فإن العدد (ب) يقبل القسمة على 11 . العدد (ج) هو فرق بين مربعين

$$2000^2 - 999^2 = (2000 - 999)\,(2000 + 999) = (1001) \times 2999$$

ولذا فهو مؤلف. أما العدد (د) فهو مؤلف لأن مرتبة أحاده هي $1 + 4 = 5$ .
ولذا فهو يقبل القسمة على 5 . إذن، العدد الأولى هو (أ) .

(٣١) [Aust.MC 1975] عدد الأزواج المرتبة $(p,q)$ حيث $p$ و $q$ عددان أوليان مختلفان يحققان $p\,|\,(q^2-q)$ و $q\,|\,(p^2+p)$ هو

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

**الحل**

الإجابة هي (أ): بما أن $p\,|\,q(q-1)$ و $p$ و $q$ أوليان نسبياً فإن $p\,|\,(q-1)$ وبهذا فإن $p \le q-1$ . أيضاً $q\,|\,p(p+1)$. ومنه فإن $q\,|\,(p+1)$ ومن ثم فإن $q \le p+1$. أي أن $p \ge q-1$ . إذن $p = q-1$ . ولكن العددين الأوليين الوحيدين المتتاليين هما 2 و 3 . إذن، $p = 2$ و $q = 3$ ونحصل على الزوج الوحيد $(2, 3)$ .

(٣٢) [Aust.MC 1984] ما أصغر عدد صحيح موجب بحيث يكون حاصل ضربه بالعدد 504 مربعاً كاملاً ؟

(أ) 2 (ب) 6 (ج) 7 (د) 14

**الحل**

الإجابة هي (د) : لاحظ أولاً أن $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ .

أصغر عدد $n$ يجعل $2^3 \times 3^2 \times 7 \times n$ مربعاً كاملاً هو $n = 2 \times 7 = 14$ .

(٣٣) [Aust.MC 1981] بكم طريقة يمكن كتابة العدد 24 كمجموع عددين أوليين ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

**الحل**

الاجابة هي (ج) : الأعداد الأولية التي أصغر من 24 هي:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. ومن ذلك نجد أن

$$24 = 5+19 = 7+17 = 11+13$$

إذن ، عدد الطرق يساوي 3 .

(٣٤) [*British IMC* 2006] ما العدد المؤلف من بين الأعداد التالية ؟

(أ) $2^2-1$ (ب) $2^3-1$ (ج) $2^5-1$ (د) $2^6-1$

**الحل**

(٣٤) الإجابة هي (د): لاحظ أن:

$2^2-1=3$ عدد أولي

$2^3-1=7$ عدد أولي

$2^5-1=31$ عدد أولي

$2^6-1=63=7\times 9$ عدد مؤلف.

(٣٥) [*British IMC* 1999] لأي من الخيارات التالية يكون حاصل الضرب $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\dots(1+\frac{1}{n})$ عدداً صحيحاً ؟

(أ) $n$ فردي (ب) $n$ زوجي

(ج) $n$ يقبل القسمة على 3 (د) دائماً.

**الحل**

الإجابة هي (أ) : حاصل الضرب هو

$$\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2}$$

وهذا عدد صحيح إذا كان $n$ فردياً.

| |
|---|
| (٣٦) [British JMC 1998] مجموع القواسم الأولية المختلفة للعدد 1998 هو |
| (أ) 42 (ب) 43 (ج) 116 (د) 1001 |

**الحل**

الإجابة هي (أ) : بتحليل العدد 1998 إلى قوى عوامله الأولية نجد أن

$$1998=2\times999=2\times3^2\times111=2\times3^3\times37$$

إذن قواسمه الأولية هي 2 ، 3 ، 37 ومجموعها هو $2+3+37=42$ .

| |
|---|
| (٣٧) [AHSME 1998] لنفرض أننا كتبنا العدد 1998 كحاصل ضرب عددين صحيحين موجبين بحيث يكون الفرق بينهما أصغر ما يمكن. ما هذا الفرق؟ |
| (أ) 8 (ب) 15 (ج) 17 (د) 47 |

**الحل**

الإجابة هي (ج) : بتحليل العدد 1998 إلى قوى عوامله الأولية نجد أن

$1998 = 2 \times 3^3 \times 37$ عدد قواسم العدد 1998 يســـاوي $16 = 2 \times 4 \times 2$.
وإذا أردنا كتابته كحاصل ضرب عددين فيمكن انجاز ذلك بعدد من الطرق هو $\frac{16}{2} = 8$. وبهذا يكون لدينا حواصل الضرب التالية:
$1 \times 1998$ ، $2 \times 999$ ، $3 \times 666$ ، $6 \times 333$ ، $9 \times 222$ ، $18 \times 111$ ،
$37 \times 54$ ، $27 \times 74$.
الآن ، نحصل على فرق أصغر ما يمكن إذا كان القاسمان قريبين من بعضهما (أي أنهما قريبان من $\sqrt{1998} \approx 45$). وبهذا فإن الفـــرق الأصـــغر هـــو $54 - 37 = 17$.

(٣٨) [*AHSME* 1990] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصـــغر مـــن 50 ولكل منها عدد فردي من القواسم الموجبة ؟

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 7 (د) 9

**الحل**

الإجابة هي (ج) : الاعداد التي عدد قواسمها الموجبة عدد فردي يجـــب أن تكون مربعات كاملة. والمربعات الكاملة التي أصغر من 50 هي:
$1^2 = 1$ ، $2^2 = 4$ ، $3^2 = 9$ ، $4^2 = 16$ ، $5^2 = 25$ ، $6^2 = 36$ ،
$7^2 = 49$ وعددها 7.

(٣٩) [*British IMC* 2000] ما عدد الأصفار في بداية العدد $5^6 \times 4^5 \times 3^4$؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 8

**الحل**

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن

$$\begin{aligned}3^4 \times 4^5 \times 5^6 &= 3^4 \times 2^{10} \times 5^6 \\ &= 3^4 \times 2^4 \times 2^6 \times 5^6 \\ &= 3^4 \times 2^4 \times 10^6 \\ &= 81 \times 16 \times 10^6 \\ &= 1296 \times 10^6\end{aligned}$$

ويكون عدد الأصفار في بداية العدد هو 6 .

## مسائل غير محلولة

(١) ما العدد المؤلف من بين الأعداد التالية ؟

(أ) $2^3-1$ (ب) $2^5-1$ (ج) $2^7-1$ (د) $2^{11}-1$

(٢) نقول إن الأعداد $p$ ، $p+2$ ، $p+4$ ثلاثيات أولية إذا كانت جميعها أعداداً أولية. ما هو عدد الثلاثيات الأولية بين العددين 25 و 75 ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٣) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 100 وعدد قواسمها الموجبة يساوي 10؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 5

(٤) [$MA\Theta$ 2002] ما عدد القواسم الموجبة الزوجية للعدد !9 ؟

(أ) 20 (ب) 100 (ج) 140 (د) 160

(٥) [$MA\Theta$ 2002] ما هو أصغر عدد أولي يقسم المجموع $3^{15}+5^{17}$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 11

(٦) [$Aust.MC$ 1984] أكبر قوة $k$ بحيث يقبل العدد !50 القسمة على $2^k$ هي:

(أ) 25 (ب) 42 (ج) 47 (د) 50

(٧) لنفرض أن $n$ عدد صحيح موجب وأن $A=n^2-n+1$ و $B=n^2+n+1$ . العبارة الصائبة من بين العبارات التالية هي:

(أ) $A$ و $B$ عددان فرديان (ب) $A$ و $B$ عددان زوجيان.

(ج) $A$ عدد فردي و $B$ عدد زوجي (د) $A$ عدد زوجي و $B$ عدد فردي

(٨) إذا كان $n$ عدداً صحيحاً موجباً فما أصغر عدد أولي يقسم العدد $3^{2^n}+1$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 7

(٩) [$MA\Theta$ 2003] إذا كانت $a$ ، $b$ ، $c$ ، $d$ أعداداً أولية مختلفة فما عدد القواسم الموجبة للعدد $lcm(a^4b^3c^2d\,,a^7b^5c^3d\,,a^5b^4c^3d^2)$ ؟

(أ) 120 (ب) 210 (ج) 576 (د) 1080

(١٠) ما عدد الأعداد الأولية $p$ التي تجعل كل من $4p^2+1$ و $6p^2+1$ عدداً أولياً ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(١١) [$Cayley$ 2009] ما أصغر عدد أولي يمكن كتابته كمجموع ثلاث أعداد مؤلفة مختلفة ؟

(أ) 11 (ب) 13 (ج) 17 (د) 19

(١٢) [$Fermat$ 2011] ما العدد من بين الأعداد التالية الذي يجب أن يكون زوجياً ؟

(أ) المتوسط الحسابي لعددين زوجيين .

(ب)المتوسط الحسابي لعددين أوليين.

(ج) المتوسط الحسابي لمربعين كاملين .

(د) المتوسط الحسابي لعددين كل منهما مضاعف للعدد 4 .

(١٣) ما قيمة $\gcd(8!, 800)$ ؟

(أ) 140 (ب) 150 (ج) 160 (د) 180

(١٤) ما ناتج قسمة مجموع قواسم العدد $2^2 \times 3 \times 5$ الموجبة على عـدد قواسمه الموجبة ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 13 (د) 14

(١٥) إذا كان عدد القواسم الموجبة للعدد $n$ يساوي 5 فما عـدد القواسم الموجبة للعدد $n^3$ ؟

(أ) 5 (ب) 12 (ج) 13 (د) 15

(١٦) ما عدد القواسم الموجبة للعدد 10000 التي هي مربعات كاملة ؟

(أ) 6 (ب) 9 (ج) 12 (د) 15

(١٧) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 150 والتي لها عدد فردي من القواسم الموجبة ؟

(أ) 8 (ب) 9 (ج) 10 (د) 12

(١٨) [*Cayley* 1998] إذا كان العدد $2^3 \times 5^9 \times 7^{b+4}$ مكعباً حيث $a$ و $b$ عددان صحيحان موجبان فما أصغر قيمة للمجموع $a+b$ ؟

(أ) 2 (ب) 5 (ج) 6 (د) 8

(١٩) ما مجموع مراتب أصغر عدد صحيح موجب عدد قواسمه الموجبة يسـاوي 14؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) 12 (د) 14

(٢٠) إذا كان $n$ عدداً صحيحاً وكان $M = n(n+1)(n+2)(n+3)$ مربعـاً كاملاً فإن $M$ يساوي

(أ) 0 (ب) 2 (ج) 4 (د) 9

[إرشاد: أثبت أولاً أن $M+1$ مربع كامل ].

(٢١) [Fermat 2008] إذا كان $m$ عدداً فردياً وكان $n$ عدداً زوجياً فأي من الأعداد التالية يجب أن يكون فردياً ؟

(أ) $2m+3n$ (ب) $3n+2m$ (ج) $4n+m$ (د) $mn$

(٢٢) [AMC10B, 2005] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ التي لا تزيد عن 24 بحيث يقبل العدد $n!$ القسمة على $1+2+...+n$؟

(أ) 16 (ب) 18 (ج) 20 (د) 22

(٢٣) [AMC10 2004] أي من الأعداد التالية هو مربع كامل؟

(أ) $98!\times 99!$ (ب) $98!\times 100!$ (ج) $99!\times 100!$ (د) $99!\times 101!$

(٢٤) [AMC10B 2003] ما أكبر قاسم للعدد $(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)$ من بين الأعداد التالية وذلك لكل عدد صحيح موجب زوجي $n$؟

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 11 (د) 15

(٢٥) ما أصغر عدد صحيح موجب عدد قواسمه الموجبة يساوي 6 ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 48 (د) 64

(٢٦) [MAΘ 2007] إذا كان $n$ هو أصغر عدد صحيح موجب يجعل $7056n$ مكعباً كاملاً فما مجموع مراتب $n$ ؟

(أ) 3 (ب) 9 (ج) 12 (د) 15

(٢٧) [AMC10B 2003] مجموع خمسة أعداد صحيحة موجبة متتالية زوجية يقل عن مجموع أول ثمانية أعداد صحيحة موجبة متتالية فردية بمقدار 4. ما أصغر الأعداد الزوجية ؟

(أ) 6 (ب) 8 (ج) 10 (د) 12

(٢٨) [$AMC10A$ 2002] استخدمنا كل من المراتب 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 9 مرة واحدة فقط لتكوين أربع أعداد أولية كل منها مكون من مرتبتين. ما مجموع الأعداد الأولية الأربعة ؟

(أ) 150 (ب) 160 (ج) 170 (د) 190

(٢٩) [$MA\Theta$ 2009] إذا كان $n$ هو أكبر عـــدد صحيح موجب مجموع قواسمه الموجبة يساوي 38 فما مجموع مراتب $n$؟

(أ) 9 (ب) 10 (ج) 11 (د) 12

(٣٠) [$MA\Theta$ 2011] نقول إن العدد الصحيح $n > 1$ عدد تام إذا كان مجمـــوع قواسمه الموجبة يساوي $2n$ . إذا كان $A$ و $B$ هما أصغر عددين تامين فما عدد القواسم الموجبة للعدد $A+B$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6

(٣١) نقول إن العدد الصحيح $n > 1$ عدد ناقص إذا كان مجموع قواسمه الموجبة أصغر من $2n$ . ما أصغر الأعداد الناقصة من بين الأعداد التالية ؟

(أ) 12 (ب) 14 (ج) 21 (د) 28

(٣٢) ليكن $d$ هو القاسم المشترك الأكبر للعـــددين 341 و 217 . مـــا عـــدد القواسم الموجبة للعدد $d+4$؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٣٣) [$Aust.MC$ 1998] ما أكبر قاسم للعدد $72^3$ ولا يساويه؟

(أ) $2^5 \times 3^5$ (ب) $2^6 \times 3^6$ (ج) $2^8 \times 3^6$ (د) $2^9 \times 3^5$

(٣٤) [*Aust. MC* 1993] ما القواسم الأولية المختلفة للعدد $10^4-1$؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٣٥) [*Aust. MC* 1987] مجموع القواسم الزوجية الموجبة للعدد 32 هو

(أ) 60 (ب) 62 (ج) 63 (د) 72

(٣٦) [*Aust, MC* 1979] إذا كان $n$ عدد صحيحاً، فما العدد الفردي من بين الأعداد التالية ؟

(أ) $3n$ (ب) $2n+1$ (ج) $n^2$ (د) $n^3$

(٣٧) [*British SMC* 2003] العام 2003 عدد أولي. ما عدد المربعات الكاملة التي تقسم العدد $2003^{2003}$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 44 (د) 1002

(٣٨) [*British SMC* 2001] ما العدد $n$ من بين الأعداد التالية الذي يجعل العبارة التالية خاطئة "إذا كان $n$ عدداً أولياً فإن $n^2+2$ عدد أولي"؟

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 6 (د) 9

(٣٩) [*British JMC* 2005] عدد الأعداد التي تحتوي على ثلاث مراتب والتي يمكن تكوينها من المراتب 1 ، 3 ، 5 هو 6 . ما عدد الأعداد الأولية من بين هذه الأعداد ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٤٠) [*British JMC* 1998] ما عدد الأعداد الأولية المكونة من ثلاث مراتب بحيث يكون مجموع مراتبها يساوي 25 ؟

(أ) 1 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٤١) حاصل ضرب قواسم العدد 12 الموجبة ما عدا العدد 12 يساوي $12^2$ لأن هذه القواسم هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 وأن $1\times2\times3\times4\times6=144=12^2$ .
كم عدد من بين الأعداد 14 ، 15 ، 18 ، 20 يحقق هذه الخاصية ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٤٢) ما العدد من بين الأعداد التالية الذي مجموع قواسمه الموجبة مربع كامل ؟

(أ) $3^2$ (ب) $5^2$ (ج) $6^2$ (د) $9^2$

(٤٣) مجموع القواسم الموجبة لعدد واحد فقط من بين الأعداد التالية مربع كامل.
ما قيمة هذا العدد ؟

(أ) $2^3$ (ب) $3^3$ (ج) $5^3$ (د) $7^3$

(٤٤) [*British IMC* 2001] لاحظ أن العـــدد $2001=3\times23\times29$ . أي مـــن الأعداد التالية هو حاصل ضرب ثلاثة أعداد أولية مختلفة ؟

(أ) 45(ب) 60 (ج) 91 (د) 105

(٤٥) ما مجموع مراتب أصغر عدد صحيح موجب عدد قواسمه الموجبة يســاوي 12؟

(أ) 6 (ب) 9 (ج) 14 (د) 15

## إجابات المسائل غير المحلولة

| رقم السؤال | الإجابة | رقم السؤال | الإجابة | رقم السؤال | الإجابة | رقم السؤال | الإجابة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | د | ٢ | أ | ٣ | ب | ٤ | ج |
| ٥ | أ | ٦ | ج | ٧ | أ | ٨ | أ |
| ٩ | ج | ١٠ | ب | ١١ | د | ١٢ | د |
| ١٣ | ج | ١٤ | د | ١٥ | ج | ١٦ | ب |
| ١٧ | د | ١٨ | ب | ١٩ | ج | ٢٠ | أ |
| ٢١ | ج | ٢٢ | أ | ٢٣ | ج | ٢٤ | د |
| ٢٥ | ب | ٢٦ | ج | ٢٧ | ب | ٢٨ | د |
| ٢٩ | ب | ٣٠ | ج | ٣١ | ب | ٣٢ | ب |
| ٣٣ | ج | ٣٤ | ج | ٣٥ | ب | ٣٦ | ب |
| ٣٧ | د | ٣٨ | ب | ٣٩ | أ | ٤٠ | أ |
| ٤١ | ج | ٤٢ | د | ٤٣ | د | ٤٤ | د |
| ٤٥ | أ | | | | | | |

## المراجع

[١] البركاتي، سلطان سعود ، مبادىء أساسية لأولمبياد الرياضيات ، مطابع الحميضي، الطبعة الأولى ١٤٣٢هـ (٢٠١١م).

[٢] الجوعي، عبدالله محمد ، مسائل تحضيرية لأولمبياد الرياضيات ، مطابع الحميضي، الطبعة الأولى، ١٤٣١هـ (٢٠١٠م).

[٣] سمحان، معروف عبدالرحمن و أبو عمه، عبدالرحمن محمد سليمان والذكير، فوزي أحمد ، قاموس العلوم الرياضية، النشر العلمي والمطابع، منشورات جامعة الملك سعود ، ١٤٢٢هـ (٢٠٠١م) .

[٤] سمحان، معروف عبدالرحمن والسنوسي ، صالح عبدالله ، استراتيجيات حلول المسائل ( مترجم) ، تحت الطبع.

[٥] سمحان، معروف عبدالرحمن و الذكير ، فوزي أحمد ، نظرية الأعداد وتطبيقاتها، دار الخريجي للنشر والتوزيع ١٤٣١هـ (٢٠١٠م) .

[٦] سمحان، معروف عبدالرحمن وأندريكا، دورين والذكير، فوزي أحمد ، رياضيات الأولمبياد – الجبر – الجزء الأول ، دار الخريجي للنشر والتوزيع ١٤٣٢هـ (٢٠١١م).

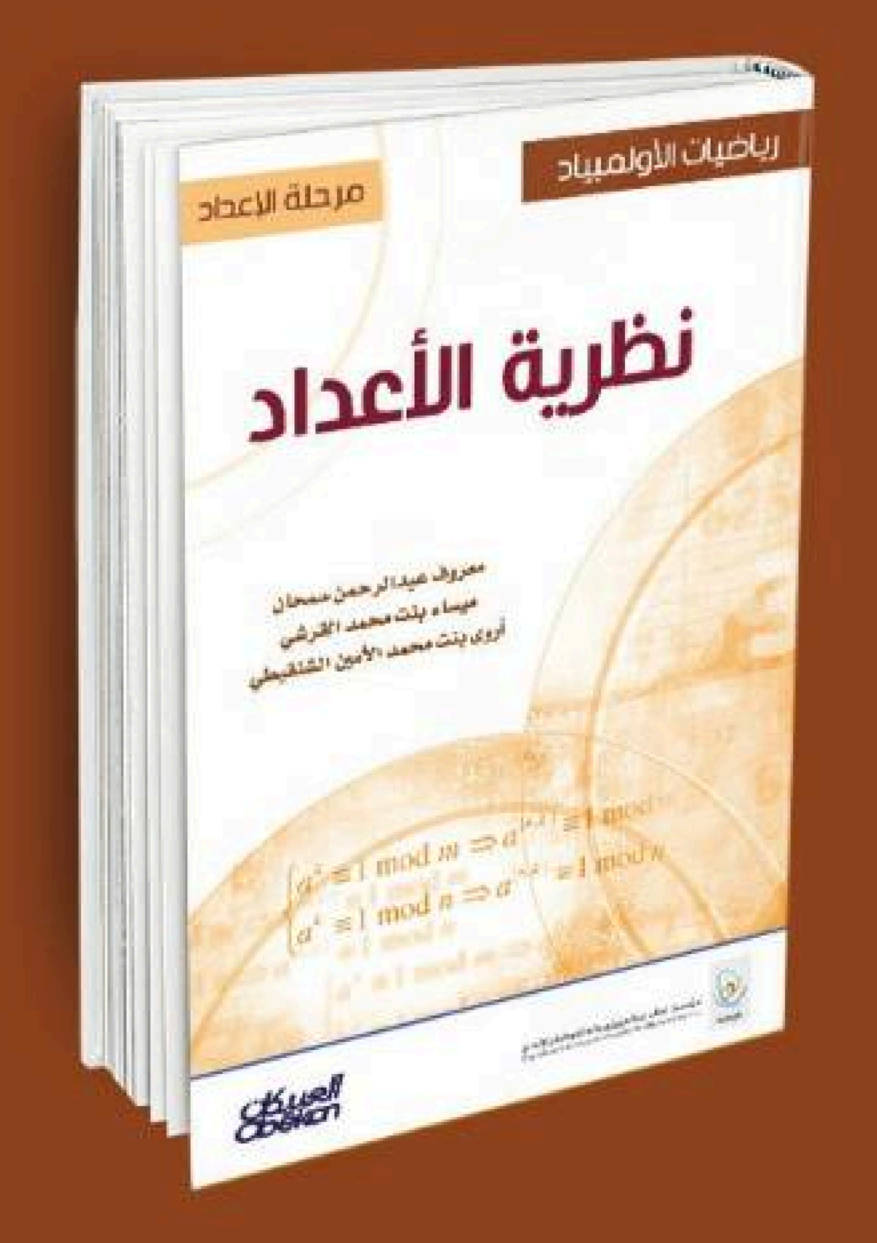
[٧] سمحان، معروف عبدالرحمن وأندريكا، دورين والذكير، فوزي أحمد ، رياضيات الأولمبياد – نظرية الأعداد – الجزء الأول – دار الخريجي للنشر والتوزيع ١٤٣٢هـ (٢٠١١م) .

[8] Atkins, WJ, Edwards JD, King DJ, O'Halloran PJ, and Taylor PJ, Austrailian Mathematics Competition Book 1 (1978- 1984), AMT Publishing 2004.
[9] Atkins WJ, Munro JE, and Taylor PJ, Australian Mathematics Competion (1992 – 1998), AMT Publishing 2009.
[10] Atkins WJ, Taylor PJ, Australian Mathematics Competion (1999 – 2005), AMT Publishing 2007 .
[11] Batterson J, Competition Math For Middle School, AoPS Inc., 2011.
[12] Canadian Mathematics Competitions, Past Contest Problems With Solutions, Gauss (Grade 7 ), Gauss (Grade 8 ) , Pascal (Grade 9 ), Cayley (Grade 10), and Fermat (Grade 11) (1997 – 2012) .
[13] Lehoczky Sandor, and Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving, Volume 1 : The Basics, 7th Edition, AoPS Inc. 2006
[14] Lehoczky Sandor, and Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving, Volume 2: And beyond, 7th Edition, AoPS Inc. 2006
[15] Mu Alpha Theta (MAθ), A Great Collection of High School Problems and Solution From Past Contest (1995 – 2011).
[16] O'Halloran PJ, Pollard GH, and Taylor PJ, Australian Mathematics Competition Book 2 (1985 – 1991l), AMT Publishing 2003.
[17] The UK Mathematics Trust, Ten Years of Mathematical Challenges (1997 – 2006) , The University of Leeds, Leeds LS2 9JT , 2010.

كشاف الموضوعات

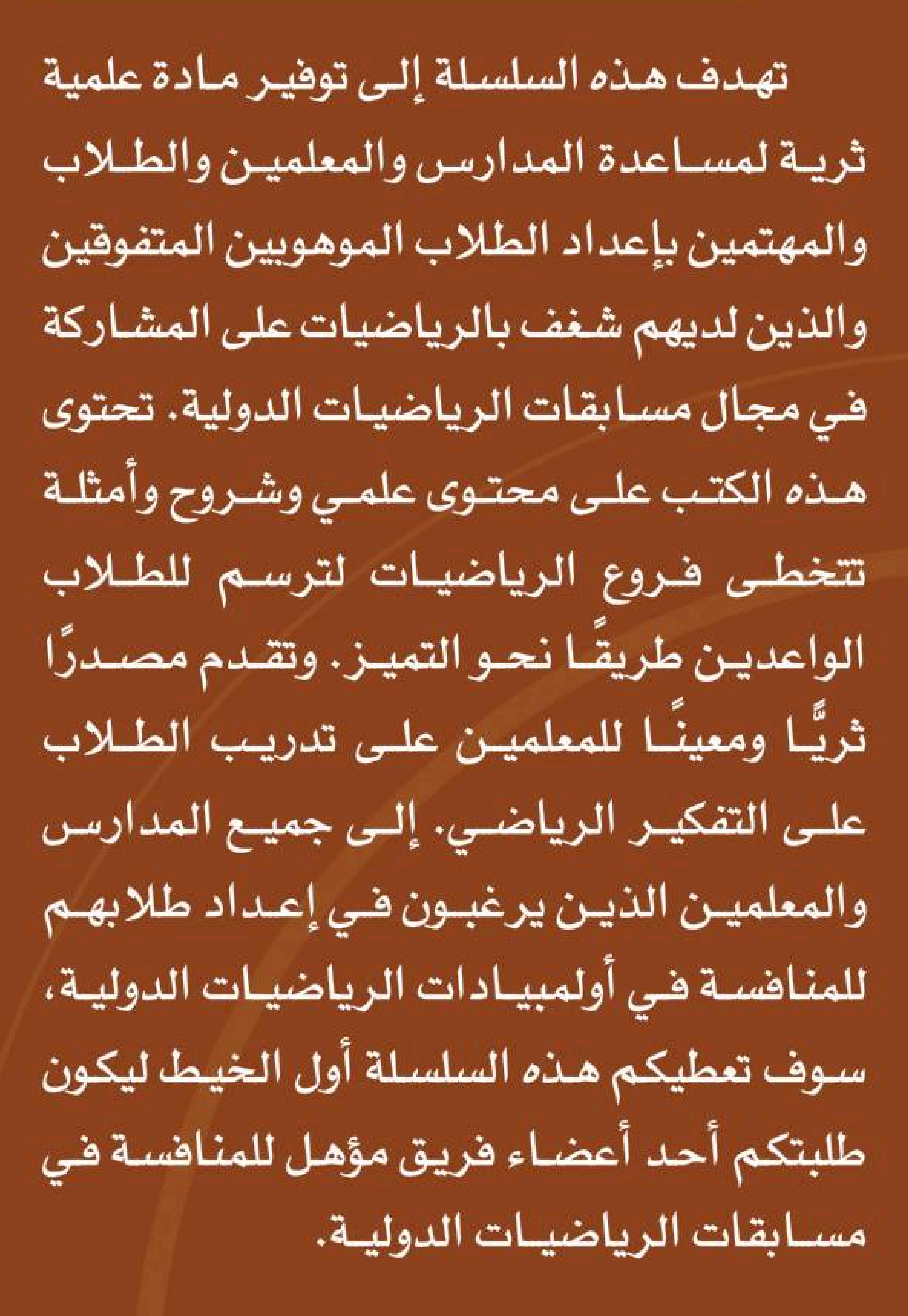
***Subject Index***

| Sum of divisors | ٩٢ | مجموع القواسم |
|---|---|---|
| Digit | ٣ | مرتبة (خانة) |
| The units digit | ٢٠ | مرتبة آحاد العدد |
| Least common multiple | ١٣ | المضاعف المشترك الأصغر |




# رياضيات الأولمبياد

## مرحلة الإعداد



تهدف هذه السلسلة إلى توفير مادة علمية ثرية لمساعدة المدارس والمعلمين والطلاب والمهتمين بإعداد الطلاب الموهوبين المتفوقين والذين لديهم شغف بالرياضيات على المشاركة في مجال مسابقات الرياضيات الدولية. تحتوى هذه الكتب على محتوى علمي وشروح وأمثلة تتخطى فروع الرياضيات لترسم للطلاب الواعدين طريقًا نحو التميز. وتقدم مصدرًا ثريًا ومعينًا للمعلمين على تدريب الطلاب على التفكير الرياضي. إلى جميع المدارس والمعلمين الذين يرغبون في إعداد طلابهم للمنافسة في أولمبيادات الرياضيات الدولية، سوف تعطيكم هذه السلسلة أول الخيط ليكون طلبتكم أحد أعضاء فريق مؤهل للمنافسة في مسابقات الرياضيات الدولية.

وترمي موهبة من خلال هذه الإصدارات المتخصصة في الرياضيات إلى توفير مادة تدريبية باللغة العربية للمدارس والمعلمين والطلاب، وهي مادة مناسبة لمستويات مختلفة من الطلاب.

**موضوع الكتاب**

١- الرياضيات - تعليم

٢- الأعداد

رأيك يهمنا





ISBN:978-603-503-801-0

